Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP37/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	22:a augusti 2017
Tid:	8.00–13.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl:
	Optimeringslära **lärobok**, nya upplagan med
	mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar
	och klisterlappar i läroboken.
	Ett **A4-blad med anteckningar** på båda sidor.
Antal uppgifter:	6
	Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Denna uppgift handlar om att ett företag ska planera montering och lackering av en av sina produkter för den kommande arbetsveckan. Den fullständiga uppgiften återfinns i deluppgift **b** och en förenklad uppgift återfinns i deluppgift **a**. Deluppgifterna rättas oberoende av varandra.

a. I denna deluppgift kommer produkten monterad till företaget och den ska enbart lackeras. Maskinen L som används för lackering har kapaciteten 6 enheter per dag och kostnaden 5 tkr per produkt. Den maximala tillgången på produkter att lackera per dag är 13 på måndagen, 12 på tisdagen, 15 på onsdagen, 8 på torsdagen och 7 på fredagen.

Lackerade produkter skeppas direkt till kund och intäkten, given i tkr per produkt och beroende på veckodag, ges av parametern p_i, $i =$ måndag, tisdag, onsdag, torsdag, fredag. Det finns inget krav på att leverera produkter utan leverans sker enbart om det är fördelaktigt.

Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att planera företagets lackering på ett sådant sätt att vinsten maximeras. **(1p)**

b. I denna deluppgift kommer produkten omonterad till företaget och ska både monteras och lackeras. För montering finns två maskiner med olika kapacitet och kostnad. Maskin M1 har kapaciteten 5 enheter per dag och kostnaden 5 tkr per produkt. Maskin M2 har kapaciteten 7 enheter per dag och kostnaden 3 tkr per produkt. Om maskin M1 används för monteringen ska produkten lackeras samma dag som den monteras. Om maskin M2 används ska produkten lackeras nästföljande dag. Maskinen L som används för lackering har kapaciteten 6 enheter per dag och kostnaden 5 tkr per produkt. Att lagra en monterad produkt från en dag till nästa kostar 2 tkr.

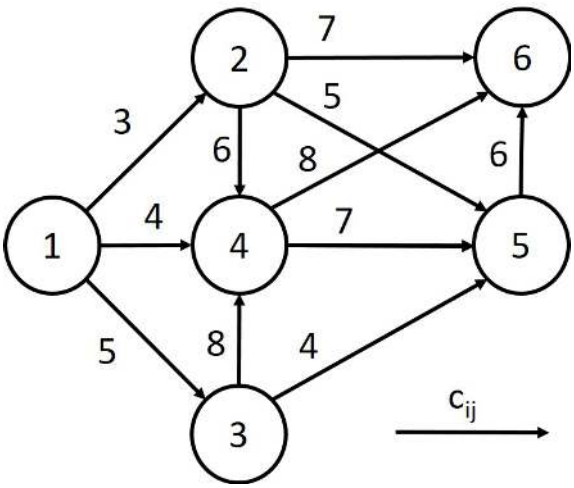
Den maximala tillgången på omonterade produkter per dag är 13 på måndagen, 12 på tisdagen, 15 på onsdagen, 8 på torsdagen och 7 på fredagen. På måndag morgon har företaget 5 monterade produkter i sitt lager och ett krav är att de på fredagen lägger 6 monterade produkter i lager till veckan därpå.

Lackerade produkter skeppas direkt till kund och intäkten, given i tkr per produkt och beroende på veckodag, ges av parametern p_i, $i =$ måndag, tisdag, onsdag, torsdag, fredag. Det finns inget krav på att leverera produkter utan leverans sker enbart om det är fördelaktigt.

Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att planera företagets montering och lackering på ett sådant sätt att vinsten maximeras. **(2p)**

Uppgift 2.

Studera följande nätverk med bågmängden
$V = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(4,5),(4,6),(5,6)\}$ och där varje båge $(i,j) \in V$ har märkts med c_{ij}. Tänk dig att varje båge motvarar en bit av en cykelväg i en stad.



a. Antag att c_{ij} motsvarar längden på den bit av cykelvägen som båge $(i,j) \in V$ representerar. Beräkna en kortaste väg från nod 1 till 6. **(1p)**

b. Formulera en matematisk modell för problemet du löste i deluppgift **a**. Modellen får ej ges på summaform utan alla termer i målfunktionen och bivillkoren ska skrivas ut. Modellen ska vara en linjär heltalsmodell. **(1p)**

c. Antag att c_{ij} motsvarar ett kvalitetsmått på den bit av cykelvägen som båge $(i,j) \in V$ representerar. Ju bättre kvalién är på vägen, desto högre är kvalitetsmåttet. Antag att du vill finna en väg från nod 1 till 6 där den sämsta kvalitén är så hög som möjligt, vilket motsvarar att finna en väg v sådan att

$$\max_{v \in V}\{\min_{(i,j)\in v}\{c_{ij}\}\}.$$

Formulera en matematisk modell för detta problem, modellen ska vara en linjär heltalsmodell. Var noga med att definiera alla variabler tydligt! **(2p)**

Uppgift 3.

Ett företag vill förse sina konsumeter, som ges av mängden K, med produkter från sina producenter, som ges av mängden P. Varje produkt måste passera exakt ett mellanlager på sin väg från en producent till en konsument. Mellanlagren ges av mängden M och de har obegränsad kapacitet.

Tillgången på produkten hos producent p är b_p, $p \in P$ och den exakta efterfrågan (som måste uppfyllas) hos konsument k är d_k, $k \in K$.
Det gäller att $\sum_{p \in P} b_p = \sum_{k \in K} d_k$.

Den linjära transportkostnaden för att skicka produkten från producent p till mellanlager m är c^1_{pm}, $p \in P$, $m \in M$ och den linjära transportkostnaden för att skicka produkten från mellanlager m till konsument k är c^2_{mk}, $m \in M$, $k \in K$. Om ett mellanlager ska användas måste det först öppnas, att öppna ett mellanlager m har en fast kostnad f_m, $m \in M$.

Studera följande, ej kompletta, matematiska modell för problemet.

Variabler:

$$
\begin{aligned}
y_m &= \begin{cases} 1 \text{ om mellanlager } m \text{ öppnas} \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \\
x_{pm} &= \text{antal produkter som skickas från producent } p \text{ till mellanlager } m \\
z_{mk} &= \text{antal produkter som skickas från mellanlager } m \text{ till konsument } k
\end{aligned}
$$

Ej komplett, blandad linjär heltalsmodell:

$$
\min \sum_{m \in M} f_m y_m + \sum_{p \in P} \sum_{m \in M} c^1_{pm} x_{pm} + \sum_{m \in M} \sum_{k \in K} c^2_{mk} z_{mk}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\text{då} & \displaystyle\sum_{m \in M} z_{mk} & = & d_k, \quad k \in K & (1) \\
& \displaystyle\sum_{p \in P} x_{pm} & \leq & M^1 y_m, \quad m \in M & (2) \\
& \displaystyle\sum_{k \in K} z_{mk} & \leq & M^2 y_m, \quad m \in M & (3) \\
& x_{pm} & \geq & 0, \quad p \in P,\ m \in M & \\
& z_{mk} & \geq & 0, \quad m \in M,\ k \in K & \\
& y_m & \in & \{0, 1\}, \quad m \in M &
\end{array}
$$

a. Två grupper av bivillkor villkor saknas i modellen. Ange dessa! **(1p)**

b. Ange det minsta möjliga värde som kan användas för M^1 respektive M^2. **(1p)**

c. Antag att man väljer, exempelvis som ett delsteg i en heuristik, att bestämma vilka mellanlager som ska vara öppna (minst ett) och vilka mellanlager som ska vara stängda. Vilken typ av problem återstår och hur kan det representeras? Om man löser det återstående problemet, vilken typ av skattning av det ursprungliga problemet erhålles? Ge tydliga motiveringar! Uppgiften bedöms på ett sådant sätt att en kortfattat och relevant svar kan ge poäng. **(2p)**

Uppgift 4.

Betrakta följande linjära heltalsproblem där s_1 och s_2 är slackvariabler till det första respektive det andra bivillkoret.

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{heltal} \end{aligned}$$

En optimal simplextablå för problemets LP-relaxation har följande utseende.

basv.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$
z	1	0	0	5/4	3/4	41 1/4
x_2	0	0	1	9/4	−1/4	9/4
x_1	0	1	0	−5/4	1/4	15/4

a. Generera samtliga Gomorysnitt ur simplextablån som givits ovan och redovisa olikheten enbart i de ursprungliga variablerna (utan slackvariabler). **(1p)**

b. Som fortsättning på deluppgift **a**, rita en (stor!) figur som illusterar det tillåtna området till problemets LP-relaxation och markera i samma figur vilka heltalslösningar som är tillåtna i problemet. Markera också var LP-optimum är och var Gomorysnitten som genererades i deluppgift **a** hamnar. **(1p)**

c. Gör en ny figur jämfört med deluppgift **b** där du ritar det tillåtna området och markerar det konvexa höljet. Utifrån din figur, teckna de villkor som definierar det konvexa höljet och avgör om något av de genererade Gomorysnitten definierar en fasett till det konvexa höljet av tillåtna heltalslösningar. **(1p)**

Uppgift 5.

Ett anläggningslokaliseringsproblem handlar om att, bland ett antal möjliga anläggningar, välja ut ett antal anläggningar som ska förse ett antal kunder med en resurs.

Låt antalet potentiella anläggningar betecknas med m och låt antalet kunder betecknas med n. Anläggning i har tillgången s_i enheter av resursen, $i = 1, \dots, m$ och kund j har efterfrågan d_j enheter av resursen, $j = 1, \dots, n$. Det finns en fast kostnad f_i för att använda anläggning i, $i = 1, \dots, m$ och en rörlig kostnad c_{ij} för transport mellan anläggning i och kund j, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

En blandad linjär heltalsmodell kan formuleras med följande variabler.

$$
\begin{aligned}
y_i &= \begin{cases} 1 \text{ om anläggning } i \text{ används} \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \\
x_{ij} &= \text{flöde från anläggning } i \text{ till kund } j
\end{aligned}
$$

Matematisk modell:

$$
\begin{array}{llll}
\min & \displaystyle\sum_{1=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i y_i, \quad i = 1, \dots, m & & \text{(Tillgång)} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n & & \text{(Efterfrågan)} \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n & & \\
& y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m & &
\end{array}
$$

I denna uppgift kommer vi att studera ett exempel med följande indata:

Fast kostnad: $f_1 = 105$, $f_2 = 110$, $f_3 = 81$, $f_4 = 120$.

Tillgång: $s_1 = 10$, $s_2 = 10$, $s_3 = 9$, $s_4 = 15$.

Efterfrågan: $d_1 = 5$, $d_2 = 4$, $d_3 = 6$, $d_4 = 8$, $d_5 = 2$.

Transportkostnaden ges av följande matris med elementen c_{ij}:

$$
\begin{pmatrix}
6 & 5 & 4 & 3 & 4 \\
7 & 6 & 3 & 4 & 5 \\
2 & 6 & 5 & 5 & 7 \\
3 & 3 & 2 & 4 & 3
\end{pmatrix}
$$

a. Använd nedanstående heuristik för att hitta en tillåten lösning till problemet. Redovisa den erhållna lösningen och kontrollera att den är tillåten.

Heuristik:

1. Skapa en lista A där anläggningarna är sorterade i stigande ordning enligt kvoten f_i/s_i (om det finns flera med samma, ta den med lägst index först).
2. Öppna den anläggning i lista A som har lägst kvot (om det finns flera med samma, ta den med lägst index först) och ta bort den från listan.
3. Kontrollera om den totala tillgången hos öppna anläggningar överskrider den totala efterfrågan. Om ja, gå till punkt 4, om nej, gå till punkt 2.
4. Skapa en lista K där kunderna är sorterade i nummerordning.
5. Kontrollera om listan K är tom. Om ja, avsluta algoritmen, om nej, fortsätt.
6. Välj den kund i lista K som har lägst nummer och ta bort den från listan.
7. Skapa en lista KA med de anläggningar som är öppna och har tillgång kvar och sortera denna i stigande ordning med hänsyn till transportkostnaden till kunden (om det finns flera med samma, ta den med lägst index först).
8. Välj den anläggning i lista KA som har lägst transportkostnad (om det finns flera med samma, ta den med lägst index först) och ta bort den från listan. Förse kunden med resurser från denna anläggning tills dess att kundens efterfrågan är tillgodosedd eller till dess att anläggningens tillgång är slut.
9. Kontrollera om efterfrågan hos kunden är tillgodosedd. Om ja, gå till punkt 5, om nej, gå till punkt 8.

(1p)

b. I denna deluppgift ska tillgångsvillkoret Lagrangerelaxeras med multiplikatorerna $v_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Gör det, teckna Lagrangesubproblemet för den generella problemformuleringen och separera det i delproblem om så är möjligt. Beräkna (med huvudräkning eller på annat enkelt sätt) den Lagarangeduala funktionens värde för det givna exemplet. Använd multiplikatorvärdena $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = -10$. **(2p)**

c. Lägg till villkoret

$$\sum_{i=1}^{m} s_i y_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$$

till den ursprungliga modellen och besvara följande frågor.

(i) Beskriv villkoret i ord. Om villkoret läggs till, påverkar detta optimallösningen till problemet?

(ii) Om villkoret läggs till, påverkar detta formuleringen av Lagrangesubproblemen i deluppgift **b**?

(iii) Om villkoret läggs till, kan detta påverka den optimistiska skattningen som fås från den Lagrangeduala funktionen i deluppgift **b**?

Uppgiften bedöms på ett sådant sätt att en kortfattat och relevant svar kan ge poäng. **(1p)**

Uppgift 6.

Studera följande kappsäcksproblem.

$$
\begin{aligned}
z^* \;=\; \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{d.å.}\quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& 0 \leq x_1 \leq 3,\ \text{heltal.} \\
& 0 \leq x_2 \leq 2,\ \text{heltal.}
\end{aligned}
$$

a. Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en optimallösning och dess målfuktionsvärde i svaret.

(2p)

b. Rita ett billigaste väg nätverk som motsvarar formuleringen för att lösa problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Ta enbart med de noder och bågar som motsvarar lösningar där kappsäcksvillkoret är uppfyllt med likhet och markera för varje båge dess kostnad och vilket variabelvärde den motsvarar.

Genom att studera ditt nätverk, avgör vilka lösningar som är tillåtna och uppfyller bivillkoret med likhet. Ange dessa! **(1p)**