Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP37/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	7:e juni 2017
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. Ett **A4-blad med anteckningar** på båda sidor.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Denna uppgift handlar om transport av grönsaker. Ett företag som har avtal med odlare och återförsäljare av tomater vill se över sina transporter för att säkerställa att den totala sträckan tomaterna transporteras mellan odlare och återförsäljare är så kort som möjligt. Denna typ av frågeställning behandlas även i Uppgift 3, men observera att förutsättningarna skiljer sig mellan uppgifterna.

I denna uppgift kommer vi att studera ett litet exempel där vi har 2 odlare, $i = 1, 2$ med tillgång på s_i kg tomater, $i = 1, 2$ samt 3 återförsäljare, $j = 1, 2, 3$, med efterfrågan av d_j kg tomater, $j = 1, 2, 3$. Tomaterna transporteras med lastbil och antalet km mellan en odlare och en återförsäljare betecknas med c_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

a. Antag att den totala tillgången är lika stor som den totala efterfrågan, det vill säga att $s_1 + s_2 = d_1 + d_2 + d_3$. Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att minimera det totala antalet km som tomaterna transporteras.

(1p)

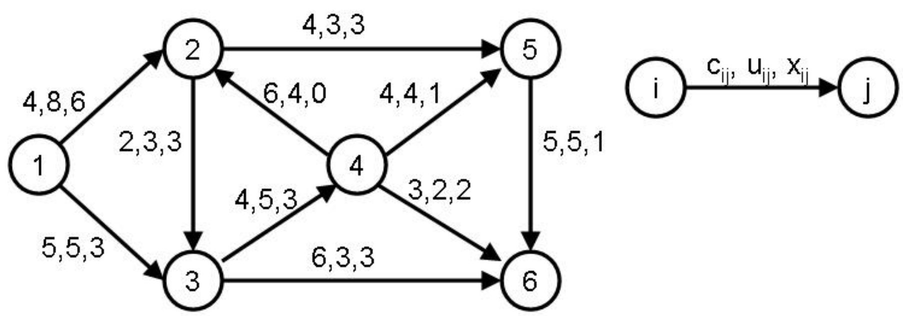
b. Antag återigen att den totala tillgången är lika stor som den totala efterfrågan. I denna deluppgift lägger vi till möjligheten att från odlare 1 transportera tomater med lastbil till en tågstation, A, och därifrån sända tomaterna med tåg till tågstation B, varifrån man med lastbil kan transportera tomater till återförsäljare 1 och 2. Antalet km för dessa sträckor betecknas e_{1A}, e_{AB}, e_{B1} respektive e_{B2}. Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att minimera det totala antalet km som tomaterna transporteras. **(1p)**

c. Utgå från a-uppgiften och bortse från möjligheterna att transportera med tåg. Antag vidare att man vet att den totala tillgången är större än den totala efterfrågan. Den överblivna tillgången kan hanteras på två sätt. I första hand ska en odlare skicka sitt överskott till återförsäljarna, och i andra hand ska överskottet kastas. En odlare får endast skicka överskott till en återförsäljare efter att det totala ordinarie behovet är tillgodosett. För varje återförsäljare gäller att det maximala överskott de får mottaga är 10% av ordinarie efterfrågan. Först efter att samtliga återförsäljare mottagit sina extra 10% får tomater kastas.

Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att minimera det totala antalet km som tomaterna transporteras. **(1p)**

Uppgift 2.

I nedanstående nätverk är nod 1 en källa av styrka 9 och noderna 5 och 6 sänkor av styrka 3 respektive 6. Alla undre gränser för flödet är lika med 0. Ett tillåtet flöde motsvarande en tillåten baslösning är given i figuren.



a. Givet flödet i figuren ovan, ange vilka av bågarna som är basbågar samt den reducerade kostnaden för icke-basbågarna. **(1p)**

b. Givet flödet i figuren ovan och resultatet i a-uppgiften, lös problemet med primala simplexmetoden för nätverk. **(1p)**

c. Studera nätverket givet ovan men antag att kostnaderna på bågarna (1,2) och (1,3) är okända. Använd optimalitetsvillkoren för att avgöra för vilka val av kostnader på dessa bågar som flödet $x_{12} = 5$, $x_{13} = 4$, $x_{23} = 2$, $x_{25} = 3$, $x_{34} = 3$, $x_{36} = 3$, $x_{42} = 0$, $x_{45} = 1$, $x_{46} = 2$, $x_{56} = 1$ är optimalt. **(2p)**

Uppgift 3.

Denna uppgift handlar om transport grönsaker och hänger samman med Uppgift 1, som med fördel löses först av de två. Observera att förutsättningarna skiljer sig mellan uppgifterna. I Uppgift 1 tittar man på det totala antalet km tomaterna transporteras och tar ingen hänsyn till vilka lastbilar som används. I denna uppgift antar vi däremot att företaget har ett antal lastbilar som ska användas till transporterna och vi behöver då angripa frågeställningen med linjär heltalsoptimering istället.

Liksom tidigare studerar vi ett exempel med 2 odlare, $i = 1, 2$ med tillgång på s_i kg tomater, $i = 1, 2$ samt 3 återförsäljare, $j = 1, 2, 3$, med efterfrågan av d_j kg tomater, $j = 1, 2, 3$. Antag att den totala tillgången på tomater är lika stor som den totala efterfrågan. Avståndet i km mellan en odlare och en återförsäljare betecknas med c_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

Antag att företaget äger lastbilar av en typ som kan transportera K kg tomater. För varje gång en lastbil används så åker den från exakt en odlare till exakt en återförsäljare och vi tar här inte hänsyn till vad lastbilen gör mellan dessa transporter eller att returresor görs. Sträckan en lastbil behöver köra från odlare i till återförsäljare j är c_{ij} km, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

a. Formulera en blandad linjär heltalsmodell som beskriver problemet att transportera tomater från odlare till återförsäljare på ett sådant sätt att antalet km lastbilarna kör minimeras. **(2p)**

b. Företaget har ett samarbete med en transportfirma som i sina lastbilar har utrymme att transportera L kg tomater. Eftersom utnyttjandet av transportfirman innebär att man delar lastbilen med dem så räknar företaget antalet km som körs av transportfirman med hänsyn till det, och denna skattade sträcka betecknas d_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

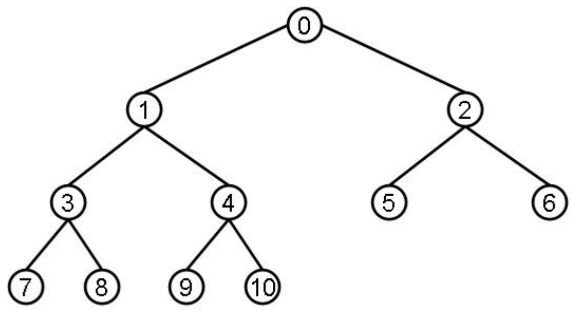
Att ha sina egna bilar ute på vägarna är god reklam för företaget och därför har de satt som krav att de inte får utnyttja transportfirmans bilar på en sträcka om de inte själva kör med minst en lastbil på sträckan.

Formulera en blandad linjär heltalsmodell som beskriver problemet att transportera tomater från odlare till återförsäljare på ett sådant sätt att det totala antlet km lastbilarna från företaget och transportfirman kör minimeras.

(1p)

Uppgift 4.

Följande ofullständiga träd genererades då Land-Doig-Dakins algoritm användes för att lösa ett linjärt heltalsproblem där målfunktionsvärdet ska minimeras.



Vid respektive nod genererades följande information, där z^*_{LP} betecknar det optimala målfunktionsvärdet för LP-relaxationen för det aktuella delproblemet.

Delproblem / Information:

[**P0**]: $z^*_{LP} = 15$
[**P1**]: $z^*_{LP} = 17$
[**P2**]: $z^*_{LP} = 16$
[**P3**]: $z^*_{LP} = 18$
[**P4**]: $z^*_{LP} = 20$
[**P5**]: $z^*_{LP} = 18$
[**P6**]: $z^*_{LP} = 23$ Heltalig lösning
[**P7**]: $z^*_{LP} = 23$
[**P8**]: $z^*_{LP} = 22$ Heltalig lösning
[**P9**]: $z^*_{LP} = 21$
[**P10**]: Saknar lösning

a. Givet informationen ovan, ange och motivera vilken som är den bästa möjliga undre respektive övre gränsen för det optimala målfunktionsvärdet. **(1p)**

b. Givet informationen ovan, ange och motivera vilka noder i trädet som kan kapas respektive som behöver undersökas vidare. **(1p)**

Antag att man tillsammans med den ordinarie Land-Doig-Dakins algoritm har använt en heuristik som i varje nod har sökt efter en tillåten heltalslösning och i vissa fall lyckats hitta en sådan. Trädet är detsamma som ovan, men i varje nod fås istället informationen $[l, u]$, där $l = z^*_{LP}$ och $u =$*målfunktionsvärdet för den erhållna heltalslösningen*. Om ingen heltalslösning erhållits anges $u = -$.

Delproblem / Information:

[**P0**]:	$[15, 26]$
[**P1**]:	$[17, -]$
[**P2**]:	$[16, 23]$
[**P3**]:	$[18, -]$
[**P4**]:	$[20, 25]$
[**P5**]:	$[18, 21]$
[**P6**]:	$[23, 23]$
[**P7**]:	$[23, -]$
[**P8**]:	$[22, 22]$
[**P9**]:	$[21, 22]$
[**P10**]:	Saknar lösning

c. Givet informationen ovan, ange och motivera vilken som är den bästa möjliga undre respektive övre gränsen för det optimala målfunktionsvärdet. **(1p)**

d. Givet informationen ovan, ange och motivera vilka noder i trädet som kan kapas respektive som behöver undersökas vidare. **(1p)**

Uppgift 5.

Följande binära linjära problem ska lösas med tabusökning.

$$
\begin{array}{llrl}
\text{(BP)} & z^* = & \max & f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \\
& & \text{s.t.} & g1(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 4 \\
& & & g2(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 4 \\
& & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

För att minska beräkningsbördan vid tentamen finns nedan en tabell i vilken det för varje möjligt x-värde redovisas de funktionsvärden som kan vara av intresse vid lösandet av uppgiften. Tabellen ska enbart användas i syftet att läsa av dessa funktionsvärden.

Lösning:	x=				g1(x)=	g2(x)=	f(x)=
a	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	1	2	2	5
c	0	0	1	0	3	2	1
d	0	0	1	1	5	4	6
e	0	1	0	0	1	2	2
f	0	1	0	1	3	4	7
g	0	1	1	0	4	4	3
h	0	1	1	1	6	6	8
i	1	0	0	0	2	1	3
j	1	0	0	1	4	3	8
k	1	0	1	0	5	3	4
l	1	0	1	1	7	5	9
m	1	1	0	0	3	3	5
n	1	1	0	1	5	5	10
o	1	1	1	0	6	5	6
p	1	1	1	1	8	7	11

Specifikationer för tabusökningen:

- Startlösning: f, dvs $x = (0,1,0,1)$
- Omgivning: De tillåtna lösningar som erhålles då två variabler med olika värde byter värde (exempelvis $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$ byter med varandra till $x_1 = 1$ och $x_2 = 0$).
- Tabu: Att de variabler som bytt värde med varandra byter tillbaka.
- Tabulistans längd: 1.

a. Redovisa vilka lösningar som tillhör omgivningen till startlösningen, f, och utför därefter den första iterationen. Redovisa vilket byte som blir tabu i nästa iteration. **(1p)**

b. Baserat på valet av omgivning i en tabusökning kan vissa av de tillåtna lösningarna vara omöjliga att nå under sökningen. Är några av de tillåtna lösningarna omöjliga att nå givet de specifikationer som använts i denna uppgift? Motivera ditt svar och om det finns lösningar som inte går att nå, ange vilka. Uppgiften bedöms på sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng. Med ett kortfattat svar menas här 5-6 rader text med normalstor handstil.

(1p)

---

c. I denna deluppgift studerar vi problemet (BP) som givits ovan, men i övrigt är den fristående och handlar om insikter kring hur trädsökning fungerar. Uppgiften bedöms på sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng. Med ett kortfattat svar menas här en halv sida text med normalstor handstil.

Jämför följande:

(i) Antag att man använder strategin att utvärdera alla möjliga lösningar (tillåtna så väl som otillåtna) till (BP), hur många alternativ får du utvärdera i så fall?

(ii) Antag att du, innan du har börjat lösa (BP), ska svara på hur många LP-problem du riskerar att få lösa som mest om Land-Doig-Dakins metod används, vilket antal ska du svara med då?

Jämför dina svar för (i) respektive (ii) och förklara vilken av strategierna (i) eller (ii) som generellt sett är att föredra när man ska lösa ett linjärt problem med binära variabler. Varför är det så? **(2p)**

Uppgift 6.

En investerare har 4 miljoner dollar att återinvestera i 3 av sina bolag. De (förväntade) kommande intäkterna från respektive bolag beror på hur stora investeringar hon gör och ges av tabellen nedan. Hon kan enbart investera ett helt antal miljoner dollar per bolag, och allt ska investeras.

	Intäkt		
Investering	Bolag 1	Bolag 2	Bolag 3
0	4	3	3
1	7	6	7
2	8	10	8
3	9	12	13
4	11	14	15

a. Använd dynamisk programmering, bakåtrekursion, för att avgöra vilka investeringar hon ska göra om hon vill maximera sina kommande intäkter. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange i svaret hur mycket hon ska investera i respektive bolag samt vad den förväntade intäkten blir. **(2p)**

b. Investeraren inser att hon kan ha synergier mellan Bolag 1 och 3 i form av att om hon investerar minst 2 miljoner dollar i Bolag 1 så kommer den förväntade intäkten för Bolag 3 att vara 10% bättre än vad tabellen anger vid investeringar på 3 eller 4 miljoner dollar. Går det att ta med denna aspekt i formuleringen? Om ja, gör det och redovisa hela formuleringen i form av steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Problemet ska inte lösas. Om nej, motivera ditt svar. En nej-motivering bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng. Med kortfattat menas här ungefär 5 till 6 rader text med normalstor handstil. **(1p)**