Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP37/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	18:e mars 2017
Tid:	08.00–13.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. Ett **A4-blad med anteckningar** på båda sidor.
Antal uppgifter:	6
	Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Deluppgift a och b är fristående men handlar båda om nätverksformuleringar för beslutsproblem som kan tänkas vara aktuella i samband med att anordna en konsert.

a. I konsertlokalen, som rymmer 300 gäster, finns möjligheten att erbjuda 3 typer av biljetter, VIP-plats (A), sittplats (B) och ståplats (C). Enligt en överrenskommelse med lokalägaren så måste man sälja minst 20 biljetter av typ (A), minst 50 biljetter av typ (B) och minst 50 biljetter av typ (C). Det får maximalt säljas 200 biljetter av typ (C).

Biljettpriset, som blir en intäkt för dig som arrangör, är c_A för typ (A), c_B för typ (B) och c_C för typ (C). Den enda kostnad du behöver ta hänsyn till är en bonus till lokalägaren i det fall du säljer mer än sammanlagt 100 biljetter av typ (A) och (B) tillsammans, denna bonus är c_D för varje biljett (utöver de 100 som är bonusfria).

Under antagandet att du kan sälja samtliga 300 biljetter oavsett vilken uppdelning du gör, rita ett nätverk för ett minkostnadsflödesproblem som beskriver problemet att planera vilka typer av biljetter du ska sälja för att du ska tjäna så mycket som möjligt på biljettförsäljningen. **(1p)**

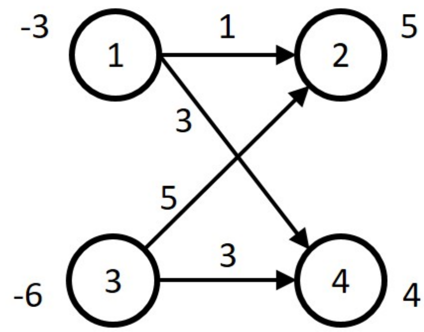
b. Den andra delen i planeringen handlar om när olika moment i förberedelserna ska genomföras. I listan nedan presenteras de moment som måste genomföras och för vardera av dessa, vilket/vilka moment som måste föregå detta moment samt hur lång tid momentet förväntas ta.

Moment	Beskrivning	Föregångare	Tidsåtgång
A	Bestämma datum	-	2
B	Hitta ljudtekniker	A	2
C	Hitta förband	A	2
D	Skriva reklamannonser	C	1
E	Förbereda utrustning	B	2
F	Trycka reklamaffischer	C	3
G	Förbereda transporter	C	1
H	Repetera	E, G	1
I	Sista minuten-detaljer	H	1

Problemet att bestämma den minimala förberedelsetiden kan formuleras som ett nätverksproblem. Ange och beskriv vilken typ av nätverk det handlar om och rita nätverket för förberedelsemomenten enligt ovan. **(2p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande nätverk där bågkostnaderna angivits intill bågarna och styrkan på källor (nod 1 och nod 3) respektive sänkor (nod 2 och nod 4) angivits intill noderna. För samtliga bågar gäller att den undre gränsen för flödet är 0 och den övre gränsen för flödet är 100.



a. Utgå från det givna flödet $x_{12} = 0, x_{14} = 3$, $x_{32} = 5$, $x_{34} = 1$ som utgör en baslösning och avgör vilka bågar som är basbågar samt beräkna den reducerade kostnaden för icke-basbågarna. **(1p)**

b. Givet flödet i a-uppgiften samt de beräkningar du gjorde där, lös problemet med primala simplexmetoden för nätverksproblem. Ange det optimala målfunktionsvärdet i ditt svar tillsammans med flödet du erhållit. **(1p)**

c. Teckna den duala målfunktionen för en LP-formulering som motsvarar ovanstående nätverk. Beräkna målfunktionsvärdet för optimallösningen du erhöll i b-uppiften genom att evaluera denna funktion. **(1p)**

d. I deluppgift a och b skickades totalt 9 enheter från källorna till sänkorna. Om man ökar källstyrkan i nod 1 med en enhet (till -4) och sänkstyrkan i nod 4 med en enhet (till 5) så ökar det totala flödet till 10 enheter. Utgå från din optimallösning i b-uppiften och använd känslighetsanalys för att besvara frågan: Med hur mycket förändras målfunktionsvärdet om denna ytterligare enhet skickas? **(1p)**

Uppgift 3.

I ett schackspel består spelplanen av ett kvadratiskt bräde med 8x8 rutor. Till spelet finns ett antal olika spelpjäser, bland andra dam och torn, för vilka det finns regler för hur spelpjäserna får förflyttas. Om en spelpjäs förflyttas till en ruta där motståndaren redan har en spelpjäs så blir motståndarens spelpjäs utslagen, och om en spelpjäs står i en position där en sådan förflyttning är möjlig så säger vi att den hotar den andra spelpjäsen.

Spelplanen kan tolkas som en matris där raderna indexeras med i och kolumnerna med j och där varje ruta således motsvarar ett element (i, j) i matrisen. Observera: Uppgifterna nedan har inget att göra med hur man faktiskt spelar schack.

De linjära heltalsmodeller som ska formuleras nedan ska båda skrivas på summationsform på ett sådant sätt att det endast är indexeringen i summor och för bivillkor som ändras om modellen ska användas för ett schackbräde av annan storlek än 8x8.

a. För spelpjäsen torn stående i ruta (i, j) gäller att det kan förflyttas enligt följande alternativ:

- till en ruta i rad i
- till en ruta i kolumn j.

Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att finna det maximala antalet torn som kan placeras på ett schackbräde utan att något torn hotar ett annat. **(2p)**

b. För spelpjäsen dam stående i ruta (i, j) gäller att hon kan förflyttas enligt följande alternativ:

- till en ruta i rad i
- till en ruta i kolumn j
- till en ruta i en av de två diagonaler som passerar genom (i, j).

Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att finna det maximala antalet damer som kan placeras på ett schackbräde utan att någon dam hotar en annan. **(2p)**

Uppgift 4.

a. Studera följande kappsäcksproblem och notera speciellt de olika övre och undre gränserna på variablerna.

$$
\begin{aligned}
z^* = \max\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\
\text{då}\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 7 \\
& 0 \leq x_1 \leq 1 \\
& 0 \leq x_2 \leq 2 \\
& 1 \leq x_3 \leq 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ heltaliga.}
\end{aligned}
$$

Använd Land-Doig-Dakins algoritm för att hitta en optimallösning till problemet. Förgrena över den variabel med störst fraktionell del, avsök $\geq$-grenen först och använd bredd-först-sökning. **(2p)**

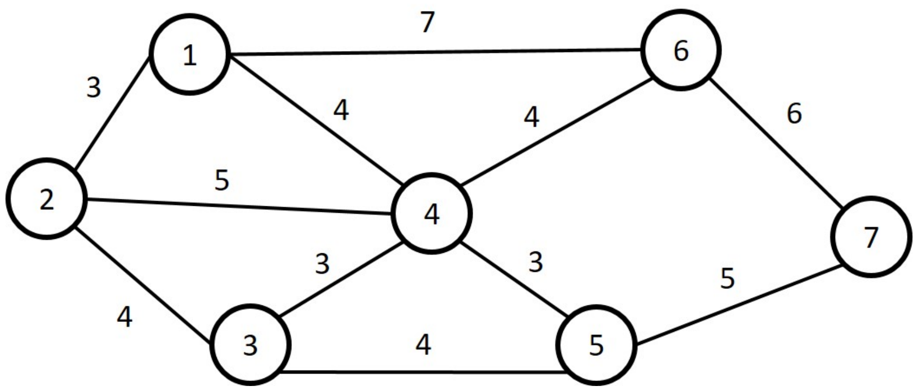
b. Studera följande kappsäcksproblem

$$
\begin{aligned}
z^* = \max\ & 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\
\text{då}\ & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 5 \\
& 0 \leq x_1 \leq 1 \\
& 0 \leq x_2 \leq 1 \\
& 0 \leq x_3 \leq 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ heltaliga.}
\end{aligned}
$$

Antag att du har tillgång till en lösare som kräver att samtliga koefficienter i problemet är positiva och att variablerna är binära. Gör en omformulering av ovanstående problem så att du kan använda den givna lösaren. **(1p)**

Uppgift 5.

Studera följande nätverk



a. Använd heuristiken närmaste-granne för att skapa en handelsresandetur i nätverket ovan. Starta med nod 1 och ange som svar i vilken ordning noderna ingår i turen. **(1p)**

b. I denna uppgift ska ett billigaste 1-träd för ovanstående nätverk konstrueras. Ett billigaste 1-träd för ett nätverk fås om man bildar ett billigaste uppspännande träd för nätverket där alla noder utom nod 1 ingår, och sedan ansluter nod 1 till detta träd med de två billigast möjliga bågarna. Använd Kruskals algoritm för att finna det billigaste uppspännande trädet för noderna 2, 3, 4, 5, 6, 7 och konstruera sedan det billigaste 1-trädet. **(1p)**

c. Givet ett nätverk, beteckna målfunktionsvärdet för en heuristiskt erhållen handelsresandetur med $\bar{z}_{TSP}$ och målfunktionsvärdet för ett optimalt billigaste 1-träd med z^*_{1-tree}. Ange vilken relation som alltid måste gälla mellan $\bar{z}_{TSP}$ och z^*_{1-tree} och motivera varför. Observera att det enbart är motiveringen av svaret som är avgörande för poängsättningen. **(2p)**

(En kommentar till deluppgift **a** som inte påverkar hur ni ska lösa uppgiften: Något som inte nämns i boken är att närmaste-granne heuristiken förutsätter att grafen är komplett. Uppgiften ovan är kostruerad så att det går bra att lösa den ändå.)

Uppgift 6.

Studera ett resursallokeringproblem

$$
\begin{aligned}
z^* \;=\; \max \; & \sum_{j=1}^{3} c_j(x_j) \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{3} a_j(x_j) \leq 4 \\
& x_1 \in \{0,1,2\} \\
& x_2 \in \{0,1\} \\
& x_3 \in \{0,1,2\}
\end{aligned}
$$

där termerna i målfunktionen respektive bivillkoren ges av följande tabeller.

x_1	$c_1(x_1)$	$a_1(x_1)$
0	0	0
1	4	2
2	5	4

x_2	$c_2(x_2)$	$a_2(x_2)$
0	0	0
1	1	2

x_3	$c_3(x_3)$	$a_3(x_3)$
0	0	0
1	2	1
2	3	2

a. Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en optimallösning och dess kostnad i svaret. **(2p)**

b. Givet lösningen i a-uppgiften, hur kan man på ett enkelt sätt beräkna en lösning för högerledet $b = 3$ utan att lösa om problemet från början? Beräkna en lösning för $b = 3$. **(1p)**