Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP37/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	19:e augusti 2016
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. Ett **A4-blad med anteckningar** på båda sidor.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Ett företag har tre fabriker, F1, F2, och F3, som levererar en sorts produkt till företagets två centrallager, L1 och L2. Den maximala produktionskapaciteten i fabrikerna är, under en given tidsperiod, T_{F1}, T_{F2} respektive T_{F3} enheter, och den exakta efterfrågan hos lagren är E_{L1} respektive E_{L2} enheter.

Kostnaden för att skicka en enhet från fabrik Fi till lager Lj är c_{ij} kr. Det är även tillåtet att flytta enheter från en fabrik till en annan till en kostnad av d kr per enhet. Det finns en övre gräns, V, på hur många enheter som **totalt** får flyttas mellan fabrikerna.

a. Antag i denna deluppgift att $T_{F1} + T_{F2} + T_{F3} = E_{L1} + E_{L2}$.

Rita ett nätverk för ett minkostnadsflödesproblem som beskriver problemet att minimera kostnaden.

(1p)

b. Antag i denna deluppgift att $T_{F1} + T_{F2} + T_{F3} > E_{L1} + E_{L2}$.

Rita ett nätverk för ett minkostnadsflödesproblem som beskriver problemet att minimera kostnaden.

(1p)

c. Antag i denna deluppgift att $T_{F1} + T_{F2} + T_{F3} > E_{L1} + E_{L2}$.

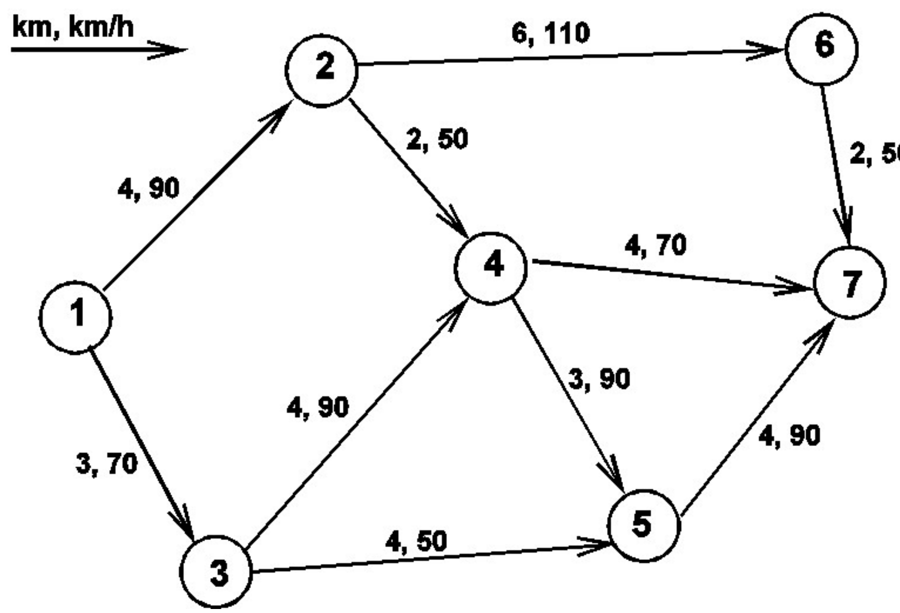
Företaget får ett erbjudande om att under den aktuella tidsperioden hyra ut någon av sina fabriker till ett annat företag för priset K kronor. Om företaget väljer att hyra ut en fabrik kan den inte levera något till företagets egna lager eller fabriker.

Kan denna aspekt tas med i nätverket? Om ja: Rita det aktuella nätverket. Om nej: Beskriv i ord hur du skulle behöva gå tillväga för att, med hjälp av en lösare för minkostnadflödesproblem, avgöra om det skulle vara lönsamt att hyra ut en fabrik, och i så fall även vilken av fabrikerna som är mest lönsam att hyra ut.

(1p)

Uppgift 2.

Studera följande nätverk där varje nod motsvarar en ort och varje båge motsvarar en väg mellan två orter. På varje båge anges längden mellan de två orterna i km samt hastighetsbegränsningen i km/h.Denna uppgit handlar om möjliga färdvägar mellan ort 1 och ort 7.



a. Bestäm den kortaste vägen från ort 1 till ort 7 genom att lösa Bellmans ekvationer i nummerordning. **(1p)**

b. Bestäm den väg från ort 1 till ort 7 där den lägsta hastighetsbegränsningen är så hög som möjligt genom att lösa Bellmans ekvationer i nummerordning.

(1p)

c. Beskriv hur man kan modifiera den ursprungliga problemformuleringen för att, när man har löst ett billigaste väg problem, få som sidoinformation den billigaste vägen till ort 7, oavsett i vilken ort man befinner sig.

Denna deluppgift bedöms på sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge en poäng, med kortfattat menas här ungefär 5-8 rader text. **(1p)**

Uppgift 3.

Ett företag har som affärsidé att åka runt med en liten lastbil och sälja glass. Glassförsäljningen sker genom att föraren till lastbilen stannar på förutbestämda hållplatser och säljer glass direkt vid bilen. Inför sommaren har företagets filial i Mjölby bestämt sig för att se över sina turer som lastbilarna åker, för att om möjligt optimera sin turlista och därigenom också sitt utnyttjande av lastbilar och förare.

I Mjölbyområdet finns 70 hållplatser och företaget har sammanställt 400 möjliga turer, inklusive bland annat de turer som användes föregående år. Tillsammans ger dessa möjliga turer flera olika alternativ för hur man kan besöka hållplatserna. En tur besöker en hållplats maximalt en gång. För att koppla samman information om vilka turer som innehåller vilka av hållplatserna finns parametern

$$a_{ht} = \begin{cases} 1, & \text{om tur } t \text{ innehåller hållplats } h, \; t = 1, \ldots, 400, \; h = 1, \ldots, 70, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

En modell för detta problem kan se olika ut beroende på förutsättningarna och i denna uppgift studeras två separata möjligheter som ges i deluppgift **a** respektive **b**. Observera att b-uppgiften är helt oberoende av informationen i a-uppgiften.

a. I denna deluppgift tilldelas varje tur en längd f_t, $t = 1, \ldots, 400$ som anges i antalet km. Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att välja ut vilka turer som ska användas för att minimera antalet körda km, givet att samtliga hållplatser ska besökas. **(2p)**

b. Efter att ha utvärderat förra årets försäljningssiffor inser företaget att vissa hållplatser är mer lönsamma än andra och baserat på detta har man tagit fram ett underlag som visar hur resultatet för försäljningen ser ut för varje hållplats. Resultatet betecknas r_h, $h = 1, \ldots, 70$, och kan vara såväl positivt som negativt eftersom det inkluderar både intäkter och kostnader associerade med respektive hållplats. Detta resultat antas vara giltigt för 1 besök vid hållplatsen, vid ytterligare besök antas resultatet vara 0. Företaget vill studera vad som händer om man väljer sina turer baserat på lönsamhet (och alltså inte har något krav på att alla hållplatser ska besökas).

Även om företaget i första hand vill besöka de hållplatser som är lönsamma inser de att vissa strategiska hållplatser ska besökas, oavsett lönsamhet. Dessa strategiska hållplatser betecknas med mängden $S \subseteq \{1, \ldots, 70\}$. Vidare gäller att lastbilen måste stanna vid alla hållplatser som ingår i en använd tur.

Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att välja ut vilka turer som ska köras för att företaget ska maximera sitt resultat, givet att de måste använda turer som besöker de strategiska hållplatserna. **(2p)**

Uppgift 4.

Studera det linjära heltalsproblemet

$$
\begin{aligned}
z^* \;=\; & \min\ 6x_1 + 8x_2 \\
& \text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 \geq 4 \\
& \qquad\quad\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
& \qquad\quad\ x_1,\ x_2, \geq 0,\ \text{heltal.}
\end{aligned}
$$

Låt s_1 och s_2 vara slackvariabler för första respektive andra bivillkoret. Optimaltablån till LP-relaxationen har utseendet

$\mathbf{x_B}$	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$
z	1	0	0	$-4/5$	$-18/5$	$88/5$
x_1	0	1	0	$-2/5$	$1/5$	$4/5$
x_2	0	0	1	$1/5$	$-3/5$	$8/5$

a. Teckna det Gomory-snitt som genereras ur x_1-raden och uttryck det i ursprungliga variablerna x_1 och x_2. Observera minustecknet framför slackvariablerna då problemet skrivs på standardform, dvs $3x_1 + x_2 - \mathbf{s_1} = 4$ respektive $x_1 + 2x_2 - \mathbf{s_2} = 4$. **(1p)**

b. Rita det tillåtna området i (x_1, x_2)-rummet och illustrera grafiskt LP-optimum samt det Gomory-snitt som tagits fram. Är det snitt du erhöll i delupppgift **a** rimligt med avseende på figuren eller ej? **(1p)**

c. En polyeder, X, kan med inre representation beskrivas enligt

$$
X = \{x : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{(i)} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j b^{(j)},
$$
$$
\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m,\ \mu_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\}.
$$

Det konvexa höljet till problemet som givits i uppgiften utgör en polyeder. Ange m och n samt de $a^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ respektive $b^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$ som behövs för att beskriva det konvexa höljet med inre representation enligt ovan.

(2p)

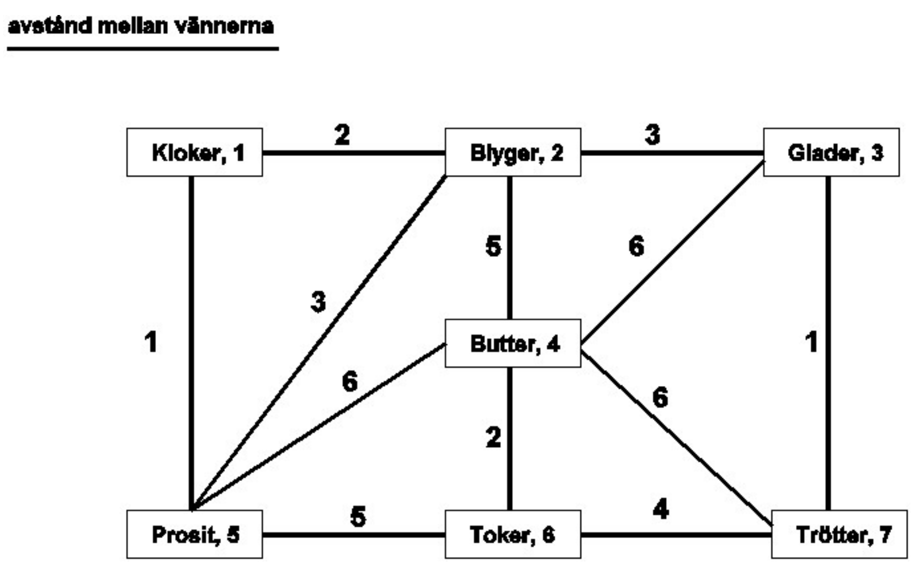
Uppgift 5.

Vi befinner oss i en tid långt innan mail, sms eller ens papperspost finns tillgängligt och de sju vännerna Kloker, Blyger, Glader, Butter, Prosit, Toker och Trötter har bestämt sig för att bygga ett rörpostsystem för att kunna skicka meddelanden till varandra.

Kraven på detta rörpostsystem är:

- Alla par av vänner måste kunna skicka till varandra.
- För att hålla Butter på bra humör måste minst 3 rör ansluta till honom, detta kommer i fortsättningen att kallas "Buttervillkoret".
- Rent praktiskt är det är enbart möjligt att bygga rörbana mellan vissa par av vänner. Beteckna mängden av möjliga par med

  $I = \{(1,2),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,7)(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(6,7)\}$.
- För varje par $(i,j) \in I$ har de mätt ut avståndet och betecknat detta med l_{ij}.
- Den totala åtgången av rör ska vara så liten som möjligt.
- De möjliga paren I samt avståndet l_{ij} illustreras i det bifogade nätverket.



Det resulterande problemet är ett billigaste uppspännande träd problem med ett sidovillkor, Buttervillkoret.

Inför, för $(i, j) \in I$, variabeln

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om rör byggs mellan } (i, j), \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Målfunktionen och Buttervillkoret kan nu betecknas

$$z = \sum_{(i,j) \in I} l_{ij} x_{ij} \quad \text{respektive} \quad x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \geq 3.$$

a. Lagrangerelaxera Buttervillkoret med multiplikatorn $u \geq 0$. Teckna målfunktionen för det Lagrangerelaxerade problemet och rita det resulterande nätverket.

(1p)

b. Bestäm den lagrangeduala funktionens värde för $u = 0$ och $u = 2$ genom att lösa motsvarande Lagrangesubproblem. Använd vilken du vill av Prims eller Kruskals algoritm (var noga med att redovisa vilken av dem du använt).

(1p)

c. Baserat på resultaten i a- och b-uppgiften, vilken är den starkaste slutsatsen du kan dra om u^* respektive z^*.

(1p)

d. Istället för att Lagrangerelaxera Buttervillkoret så kan man lösa problemet genom att först välja att ta med de tre rör som är de billigaste som ansluter till Butter, och sedan fortsätta med Prims eller Kruskals algoritm.

Tänk dig ett generellt fall av ett billigaste uppspännande träd problem med ett sidovillkor på den minimala kardinaliteten hos anslutande bågar. Kommer en sådan lösningsstrategi att garantera att den erhållna lösningen är optimal? Denna deluppgift bedöms på sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge en poäng, med kortfattat menas här ungefär 5-8 rader text.

(1p)

Uppgift 6.

Studera följande partiformningsproblem.

Produktion av maskiner ska ske under 3 veckor där produktionskostnaden vid en viss produktionsnivå (antal maskiner) under en viss vecka ges i kkr i följande tabell.

antal \ vecka	1	2	3
0	1	2	3
1	4	5	6
2	6	8	9
3	8	13	16

Lagerkostnaden är 1 kkr/maskin och baseras på det genomsnittliga antalet maskiner under veckan, som är "inkommande lager" + 0.5* "producerat antal".

Efterfrågan är för de tre veckorna 2, 3 respektive 1 maskin.

Såväl initiallagret som slutlagret är på 2 maskiner. Den maximala produktionen under en vecka är 3 maskiner, och det maximala lagret från en vecka till en annan är 3 maskiner.

a. Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en optimal produktionsplan och dess kostnad i svaret.

(2p)

b. Rita ett billigaste väg nätverk som motsvarar formuleringen för att lösa problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Observera att det i figuren tydligt ska framgå vilken månad och lagernivå som varje nod motsvarar, samt vilken riktning och kostnad varje båge har. (Problemet ska ej lösas.)

(1p)