Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP37/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	7:e juni 2016
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. Ett **A4-blad med anteckningar** på båda sidor.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Denna uppgift handlar om tillverkningen av en sorts produkt i en fabrik. Produktionen sker i form av att en råvara bearbetas i två steg, A och B, där olika maskiner är verksamma. Produkten behöver bearbetas av en av maskinerna i steg A och sedan av en av maskinerna i steg B.

I steg A finns finns tre maskiner, A1, A2 och A3, med maxkapacitet U_{A1}, U_{A2} respektive U_{A3} enheter per dag. Från maskinerna A1, A2 och A3 i steg A går halvfärdiga produkter vidare till steg B där de färdigställs. I steg B finns två identiska maskiner B1 och B2, med maxkapacieteten U_B enheter per dag.

I denna uppgift studeras ett par minkostnadsflödesformuleringar som kan vara av intresse för produktionsledningen när de arbetar med sin planering.

a. Antag att fabriken ska producera exakt K enheter per dag.

Maskinernas placering i fabriken gör att det är mer eller mindre smidigt att skicka en halvfärdig produkt från en maskin i steg A till en maskin i steg B. Varje kombination är därför associerad med en straffkostnad enligt:

	Maskin B1	Maskin B2
Maskin A1	1	2
Maskin A2	3	2
Maskin A3	1	3

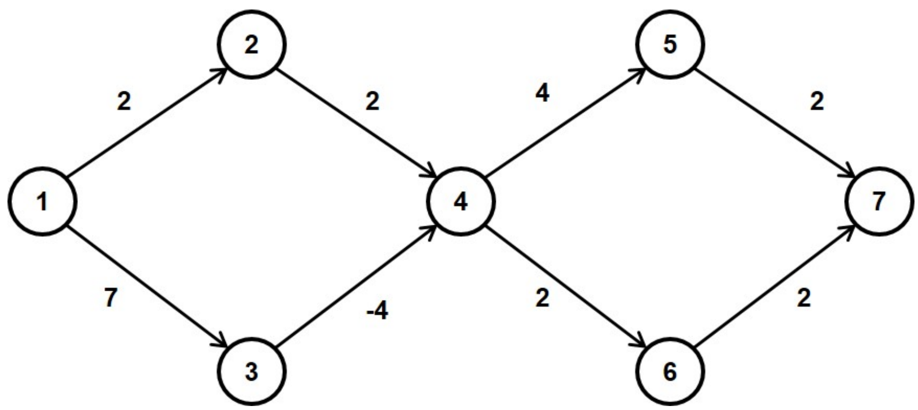
Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att planera hur många enheter som ska bearbetas på respektive maskin och hur flödet av halvfärdiga produkter ska gå, givet att straffkostnaden ska minimeras. **(1p)**

b. Eftersom vissa av maskinoperatörerna i steg A enbart har utbildning för att sköta maskin A1 och A2 vill produktionsledningen att minst L enheter per dag ska bearbetas i maskin A1 eller A2 ($L < U_{A1} + U_{A2}$). Utöka ditt nätverk i deluppgift **a** till att inkludera detta krav. **(1p)**

c. Produktionsledningen är intresserad av att veta det maximala antalet enheter som kan produceras per dag. Ignorera de straffkostnader som givits i deluppgift **a**, men låt kravet från deluppgift **b** kvarstå, och rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att maximera det totala antalet producerade enheter per dag. **(1p)**

Uppgift 2.

Studera följande nätverk där bågkostnaderna angivits på bågarna.



a. Använd Fords algoritm för att bestämma den billigaste vägen från nod 1 till nod 7 i nätverket ovan. Ange den billigaste vägen och dess kostnad i ditt svar. **(1p)**

b. Bortse från de riktningar som anges på bågarna i nätverket ovan och använd Kruskals algoritm för att bestämma det billigaste uppspännande trädet. Ange det billigaste uppspännande trädet och dess kostnad i ditt svar. **(1p)**

Deluppgift c är fristående från a- och b-uppgiften.

c. Antag att du har hittat ett billigaste uppspännande träd för ett nätverk. I nedanstående två fall, förklara hur man enklast möjligt kan uppdatera sin lösning och hitta ett nytt billigaste uppspännande träd när förutsättningarna förändras enligt:

(i) Kostnaden ökar på en båge som ingår i trädet.

(ii) En båge som tidigare inte ingick i trädet ska nu tillhöra trädet oavsett kostnad.

Denna deluppgift bedöms på sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar på respektive delfråga kan ge en poäng. Med ett kortfattat svar menas ca tre till fyra rader text, med normalstor handstil. **(2p)**

Uppgift 3.

Ett större industriföretag vill se över och optimera sina avtal med potentiella underleverantörer av muttrar i samband med att de befintliga avtalen löper ut. De vill då avgöra vilka avtal som ska förnyas och hur stor produktionen ska vara hos respektive underleverantör, fortsättningsvis kallad fabrik.

Låt mängden av tillgängliga fabriker betecknas med I. För varje fabrik $i \in I$, låt den fasta kostnaden för att anlita fabriken vara p_i kronor och den maximala produktionskapaciteten vara l_i enheter. Den rörliga kostnaden för att producera en mutter hos en fabrik $i \in I$ betecknas c_i. Låt vidare företagets totala behov av muttrar vara K enheter.

a. Formulera en linjär heltalsmodell som kan användas för att planera vilka fabriker företaget ska samarbeta med, samt hur stor produktionen ska vara hos respektive fabrik.

(2p)

b. Några av fabrikerna, betecknade med J, kommer med förslaget att företaget antingen kan få utnyttja den fulla maximala produktionskapaciteten, liksom tidigare beteckad med l_i, $i \in J$, eller en lägre maximal produktionskapacitet $m_i < l_i$, $i \in J$. Vid nyttjandet av den fulla kapaciteten är fortfarande den fasta kostnaden p_i och den rörliga c_i, $i \in J$. Vid nyttjandet av den lägre kapaciteten är den fasta kostnaden q_i och den rörliga d_i, där $q_i < p_i$ och $d_i > c_i$, $i \in J$.

För de övriga fabrikerna, $i \in I \setminus J$ gäller samma kostnader som tidigare.

Formulera en linjär heltalsmodell som kan användas för att planera vilka fabriker företaget ska samarbeta med, samt hur stor produktionen i så fall ska vara hos respektive fabrik. **(1p)**

c. Baserat på modellen i a-uppgiften ska följande krav läggas till i form av ett bivillkor. Om två eller flera av fabrikerna $i \in S$, där $S \subset I$, anlitas får inte fabrik $i = 3, 3 \notin S$ anlitas. Om ett stort M används i formuleringen måste ett minimalt värde på detta anges. **(1p)**

Uppgift 4.

Studera heltalsproblemet

$$
\begin{aligned}
z^* \;=\; \min\; & 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 8x_2 \geq 9 \\
& 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\
& x_1,\; x_2, \geq 0,\; \text{heltal.}
\end{aligned}
$$

Optimaltablån till LP-relaxationen har utseendet

$\mathbf{x_B}$	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$
z	1	0	0	$-7/20$	$-11/10$	$217/20$
x_1	0	1	0	$1/10$	$-2/5$	$19/10$
x_2	0	0	1	$-3/20$	$1/10$	$13/20$

där s_1 och s_2 är icke-negativa slackvariabler.

a. Teckna de Gomory-snitt som genereras ur x_1- respektive x_2-raden och uttryck dem i de ursprungliga variablerna x_1 och x_2. Observera minustecknet framför slackvariablerna då problemet skrivs på standardform, dvs $2x_1 + 8x_2 - \mathbf{s_1} = 9$ respektive $3x_1 + 2x_2 - \mathbf{s_2} = 7$. **(1p)**

b. Rita det tillåtna området i (x_1, x_2)-rummet och illustrera grafiskt LP-optimum samt de Gomory-snitt som tagits fram. Är de snitt du erhöll i delupppgift **a** rimliga med avseende på figuren eller ej? **(1p)**

c. Gör en ny figur jämfört med deluppgift **b** där du ritar det tillåtna området och markerar det konvexa höljet. Utifrån din figur, teckna de villkor som definierar det konvexa höljet och avgör om något av Gomory-snitten definierar en fasett till det konvexa höljet av tillåtna heltalslösningar. **(1p)**

Uppgift 5.

Studera följande binära kappsäcksproblem.

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

a. Lös LP-relaxationen till det givna problemet. **(1p)**

b. Lagrangerelaxera bivillkoret med multiplikatorn $u \geq 0$ och teckna Lagrangefunktionen. För $u = 1$, redovisa samtliga lösningar till Lagrangesubproblemet och avgör om de är tillåtna eller ej. Beräkna den Lagrangeduala funktionens värde för $u = 1$. **(1p)**

c. Denna uppgift handlar om den generella relationen mellan lösningar till Lagrangesubproblemet och lösningar till LP-relaxationen för ett kappsäcksproblem.

Studera problemet

$$\begin{aligned} \max z = \quad & \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{då} \quad & \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\}, j \in N \end{aligned}$$

med c_j, $a_j > 0$, $j \in N$, där samtliga kvoter $\frac{c_j}{a_j}$ antar unika värden.

Låt u^* vara en unik optimal multiplikator till bivillkoret om detta Lagrangerelaxeras. Låt vidare $x^{(1)}$ och $x^{(2)}$ vara den tillåtna respektive otillåtna optimallösningen till Lagrangesubproblemet för u^*. Givet denna information, hur kan x^*_{LP}, optimallösningen till LP-relaxationen, uttryckas som en funktion av $x^{(1)}$ och $x^{(2)}$? **(2p)**

Uppgift 6.

Kalle har 70 kr att spendera i ett lotteri. Lotteriet har tre typer av lotter, som alla bara har två möjliga utfall, antingen vinner du 100 kr eller så vinner du inte.

Lottyp 1 kostar 30 kr och har sannolikheten 4/10 att vinna 100 kr, lottyp 2 kostar 40 kr och har sannolikheten 5/10 att vinna 100 kr, och lottyp 3 kostar 10 kr och har sannolikheten 1/10 att vinna 100 kr.

Kalle vill använda alla sina 70 kr till att köpa lotter och han vill välja den kombination av lotter som ger den minsta risken att inte vinna minst 100 kr. Eftersom lottförsäljaren bara har 4 lotter av typ 3 kvar kan Kalle maximalt köpa 4 lotter av typ 3.

Kalles frågeställning ger upphov till ett kappsäcksproblem med multiplikativ målfunktion. Variablerna är

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{antalet köpta lotter av typ 1,} \\
x_2 &= \text{antalet köpta lotter av typ 2,} \\
x_3 &= \text{antalet köpta lotter av typ 3,}
\end{aligned}
$$

och målfunktionen uttrycker sannolikheten att inte vinna minst 100 kr. Problemet Kalle behöver lösa är således följande.

$$
\begin{array}{rl}
\min z = & \left(\frac{6}{10}\right)^{x_1} \left(\frac{5}{10}\right)^{x_2} \left(\frac{9}{10}\right)^{x_3} \\[2ex]
\text{då} & 30x_1 + 40x_2 + 10x_3 = 70 \\
& 0 \leq x_1 \leq 2 \\
& 0 \leq x_2 \leq 1 \\
& 0 \leq x_3 \leq 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ heltal}
\end{array}
$$

a. Givet att problemet ska lösas med dynamisk programmering, bakåtrekursion, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. **(1p)**

b. Baserat på formuleringen i a-uppgiften, använd dynamisk programmering, bakåtrekursion, för att beräkna vilka lotter Kalle ska köpa. **(2p)**

Tabellen på följande sida får gärna användas vid beräkningarna, och ett tips är att konsekvent räkna i 10000-delar.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{9}{10}\right)^2 &= \frac{8100}{10000}\\
\left(\frac{9}{10}\right)^3 &= \frac{7290}{10000}\\
\left(\frac{9}{10}\right)^4 &= \frac{6561}{10000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^1 &= \frac{4500}{10000}\\
\left(\frac{6}{10}\right)^1\left(\frac{5}{10}\right)^1 &= \frac{3000}{10000}\\
\left(\frac{6}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^1 &= \frac{3240}{10000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2 &= \frac{4050}{10000}\\
\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^3 &= \frac{3645}{10000}\\
\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^4 &= \frac{32805}{100000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6}{10}\right)^1\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2 &= \frac{2430}{10000}\\
\left(\frac{6}{10}\right)^1\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^3 &= \frac{2187}{10000}\\
\left(\frac{6}{10}\right)^1\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^4 &= \frac{19683}{100000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6}{10}\right)^2\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2 &= \frac{1458}{10000}\\
\left(\frac{6}{10}\right)^2\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^3 &= \frac{13122}{100000}\\
\left(\frac{6}{10}\right)^2\left(\frac{5}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^4 &= \frac{118098}{1000000}
\end{aligned}$$