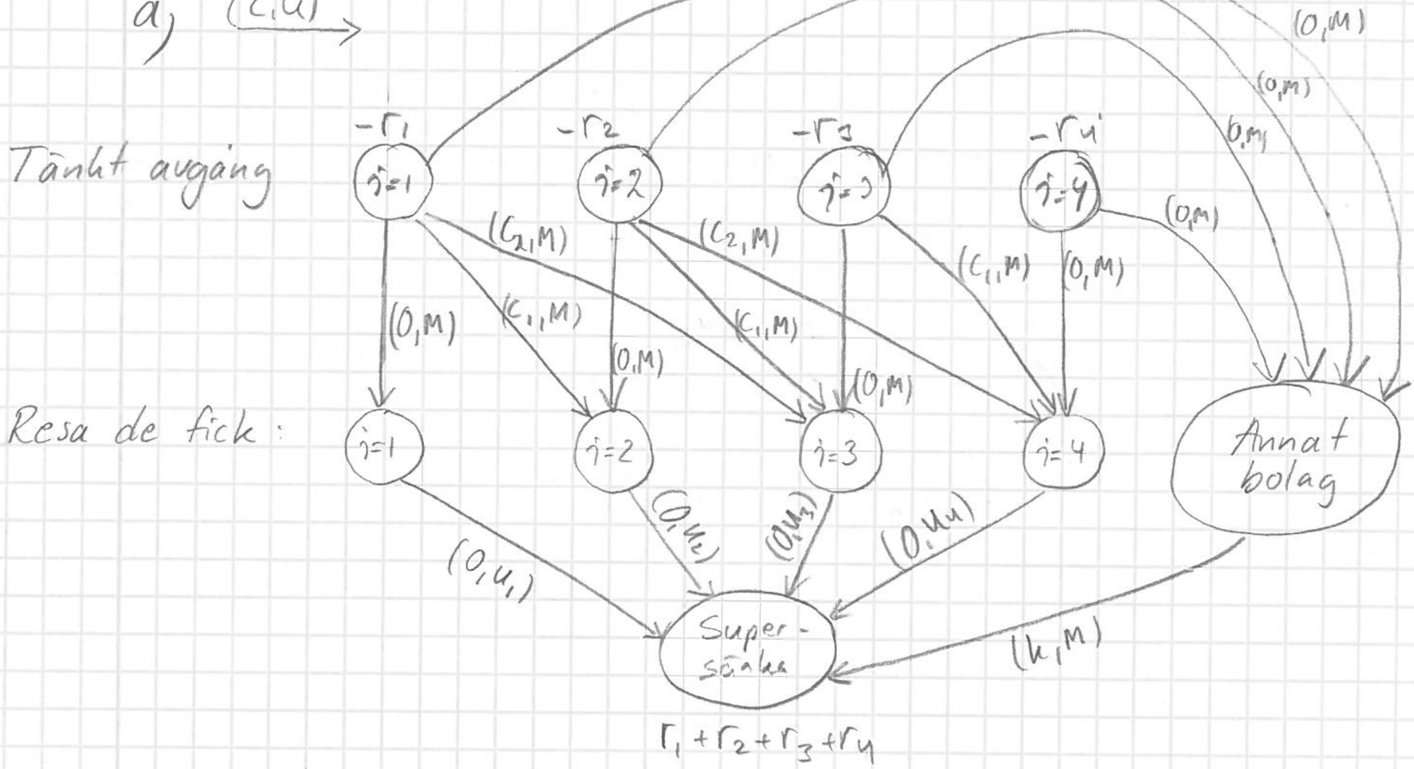
Uppgift 1

a) (c,u) →



b) Detta går inte att ta med i nätverket eftersom motsvarande båge skulle behöva ha flödet 0 eller 4 i en lösning. Däremot kan man lösa två problem, med att taxi måste användas respektive att taxi inte får användas, och jämföra lösningarna.

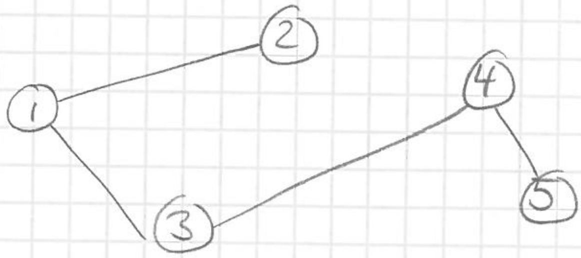
c) Det man kan göra är att införa en båge från avgång 2 till Supersänkan med kostnaden per peson i taxin, dvs. $l/4$.
Om den reducerade kostnaden indikerar att erbjudandet inte är attraktivt (dvs. $\bar{c} > 0$) för en peson kommer det heller inte att vara det för 4 pesoner och erbjudandet kan avböjas. Om $\bar{c} \le 0$ kan man inte avgöra om erbjudandet är attraktivt eller ej.

Uppgift 2

a) Börjar med att beräkna den reducerade kostnaden på bågarna för den givna duallösningen. Enbart bågar där reducerade kostnaden $= 0$ kan vara basbågar. Använder $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$

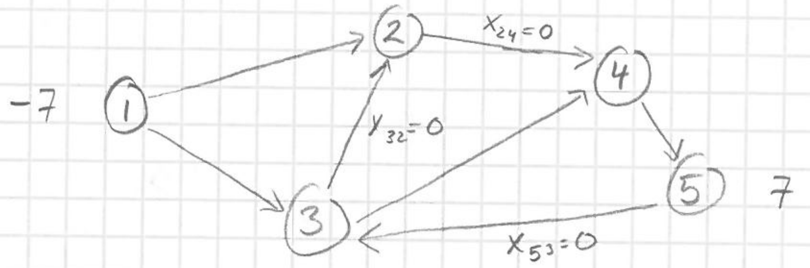
$$\left.\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= 6 + 0 - 6 = 0\\
\bar{c}_{13} &= 5 + 0 - 5 = 0\\
\bar{c}_{24} &= 4 + 6 - 9 = 1\\
\bar{c}_{32} &= 2 + 5 - 6 = 1\\
\bar{c}_{34} &= 4 + 5 - 9 = 0\\
\bar{c}_{45} &= 3 + 9 - 12 = 0\\
\bar{c}_{53} &= 2 + 12 - 5 = 9
\end{aligned}\right\}$$

De bågar med $\bar{c}_{ij} = 0$ bildar ett uppspännande träd:



Bågarna (1,2), (1,3), (3,4), (4,5) är basbågar.

b) Om flödet är 0 på icke-basbågar är vi i följande situation:



- Nodbalans nod 2: $x_{24} = 0,\ x_{32} = 0 \Rightarrow x_{12} = 0$
- Nodbalans nod 1: $x_{13} = 7$
- Nodbalans nod 3: $x_{13} = 7,\ x_{53} = 0,\ x_{32} = 0 \Rightarrow x_{34} = 7$
- Nodbalans nod 4: $x_{24} = 0,\ x_{34} = 7 \Rightarrow x_{45} = 7$

(Tips angående nodbalansanalys: Leta efter en nod där alla flöden utom ett är känt, då kan det okända flödet enkelt beräknas) fort. uppg. 2b.)

Är det erhållna flödet optimalt?
Studerar reducerade kostnader för icke-basbågar:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{c}_{24} = 1, \ x_{24} = l, \text{ ok!} \\ \bar{c}_{32} = 1, \ x_{32} = l, \text{ ok!} \\ \bar{c}_{53} = 9, \ x_{53} = l, \text{ ok!} \end{array}\right\} \text{Baslösningen är optimal!}$$

Svar: Flödet $x_{13} = x_{34} = x_{45} = 7$, $x_{12} = x_{24} = x_{32} = x_{53} = 0$ är optimalt!

c) För det givna basträdet behöver vi studera vilka flöden som är möjliga om man antar att $x = l$ eller $x = u$ för icke-basbågar.

- Nodbalans nod 5: $x_{53} = 10$ ej möjligt ty det kräver att $x_{45} = 17 > u_{45}$, så $x_{53} = 0$
- Nodbalans nod 3: $x_{32} = 10$ ej möjligt ty inflödet är maximalt $u_{13} + 0 = 8 < 10$, så $x_{13} = 0$
- För x_{24} är två fall möjliga:

Fall 1: $x_{24} = 0$ (från deluppgift b)

Fall 2: $x_{24} = 2$, nodbalans nod 2 $\Rightarrow x_{12} = 2$
nodbalans nod 1 $\Rightarrow x_{13} = 5$
nodbalans nod 3 $\Rightarrow x_{34} = 5$

Fall 2 optimallösning?

$$\left.\begin{array}{l} \bar{c}_{24} = 1, \ x_{24} = u, \text{ ej ok!} \\ \bar{c}_{32} = 1, \ x_{32} = l, \text{ ok!} \\ \bar{c}_{53} = 9, \ x_{53} = l, \text{ ok!} \end{array}\right\} \text{Lösningen är ej optimal}$$

Slutsats: Det finns två primalt tillåtna flöden som svarar mot det givna basträdet varav enbart den i fall 1 är optimal.

Uppgift 3

a)

$$\min \sum_{i=1}^{12} x_i$$

Bivillkor för att täcka delområde:

då

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad (A)$$
$$x_2 + x_3 \geq 1 \quad (B)$$
$$x_3 + x_4 \geq 1 \quad (C)$$
$$x_4 + x_5 \geq 1 \quad (D)$$
$$x_1 + x_2 + x_7 + x_8 \geq 1 \quad (E)$$
$$x_2 + x_7 \geq 1 \quad (F)$$
$$x_6 + x_9 \geq 1 \quad (G)$$
$$x_5 + x_6 \geq 1 \quad (H)$$
$$x_{10} + x_{11} \geq 1 \quad (I)$$
$$x_9 + x_{11} + x_{12} \geq 1 \quad (J)$$
$$x_{11} + x_{12} \geq 1 \quad (K)$$
$$x_8 + x_{12} \geq 1 \quad (L)$$
$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, 12$$

b) Variabel: $x_i = \begin{cases} 1 & \text{om utrustning placeras vid position } i,\ i \in I \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$\min \sum_{i \in I} x_i$$

då

$$\sum_{i \in P_k} x_i \geq 1 \quad k \in K$$
$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I$$

(Man har ett villkor för att täcka ett område $k \in K$ och mängden P_k innehåller de positioner som täcker delområde k)

c) Inför variabeln

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om både position } i \text{ och } j \text{ används}, (i,j) \in IJ \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Lägg till villkoren:

(1) $y_{ij} \leq (x_i + x_j)/2$, $(i,j) \in IJ$ (y_{ij} kan bara bli 1 om både x_i och x_j är det)

(2) $\sum_{(i,j) \in IJ} y_{ij} \geq 1$ (minst ett y_{ij} måste vara 1)

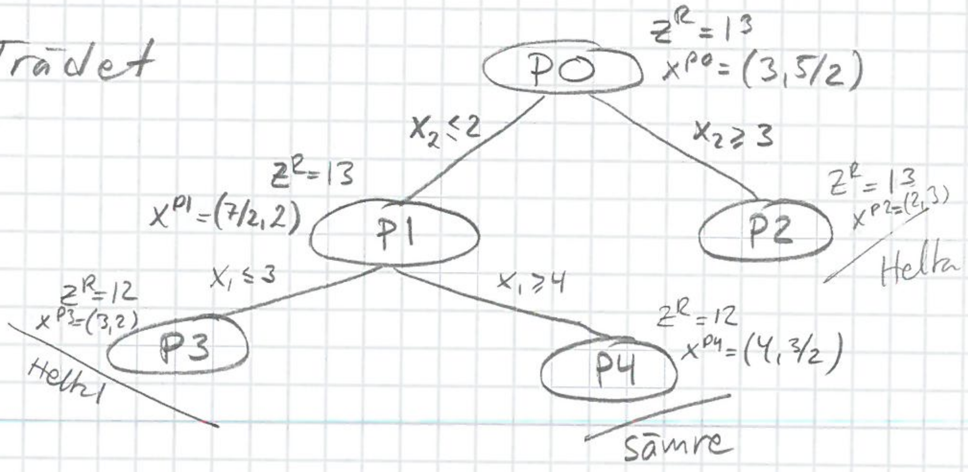
Ett alternativ till villkor (1) är att ha båda villkoren:

$y_{ij} \leq x_i$ $(i,j) \in IJ$, $i \in I$

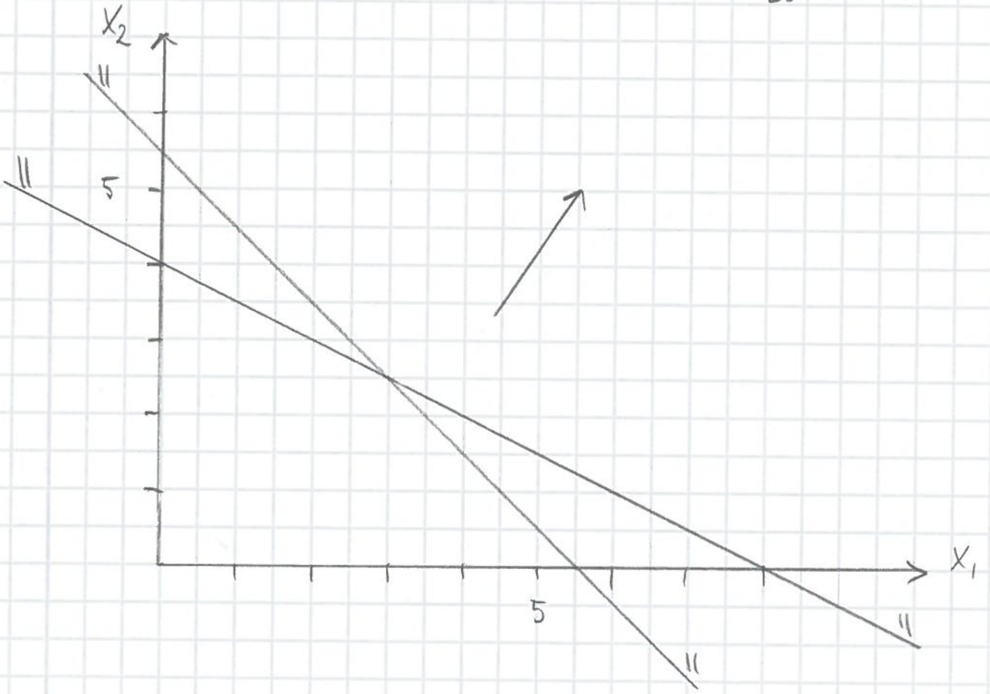
$y_{ij} \leq x_j$ $(i,j \in IJ$, $j \in I$

Uppgift 4

a) Trädet



$z^T = \cancel{-\infty}$
$= \cancel{12}$ (P3)
$= 13$ (P2)



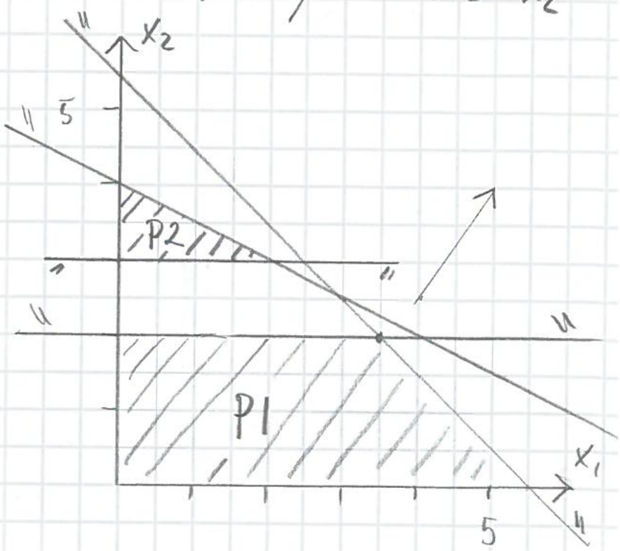
<u>P0</u>: $x^{P0} = (3, 5/2)$, $z^{P0} = 13{,}5$

Heltaliga målfunktionskoeff. $\Rightarrow z^R = 13$. Förgrena över x_2

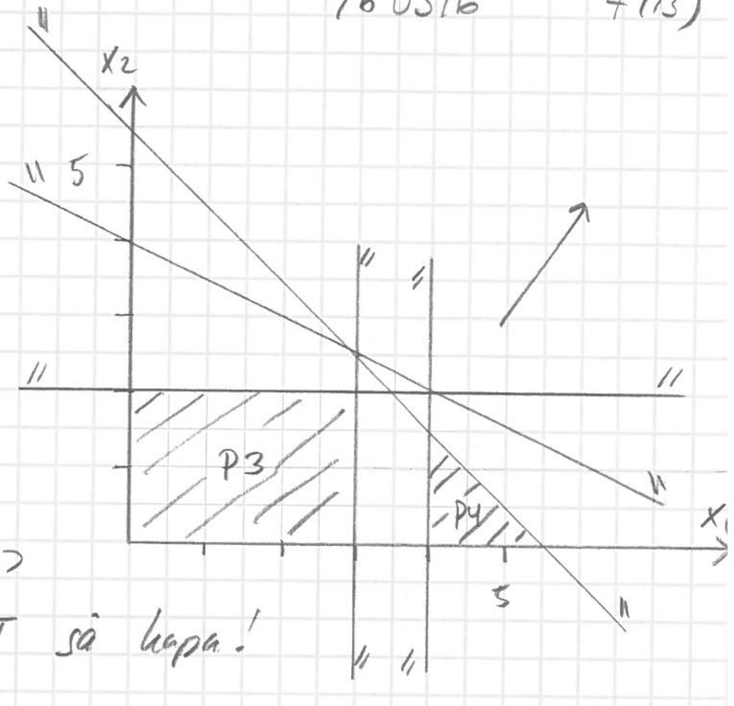
<u>P1</u>: $x^{P1} = (7/2, 2)$, $z^{P1} = 13$

$z^R = 13$

Förgrena över x_1



fort. uppg. 4a



P3:

$x^{P3} = (3,2)$, $z^{P3} = 12$

Heltalig, kapa!

P4:

$x^{P4} = (4, 3/2)$, $z^{P4} = 12{,}5$

Heltaliga målfunktionskoeff. $\Rightarrow$

$z^R = 12$, ej bättre än z^T så kapa!

P2 (se fig. för P1)

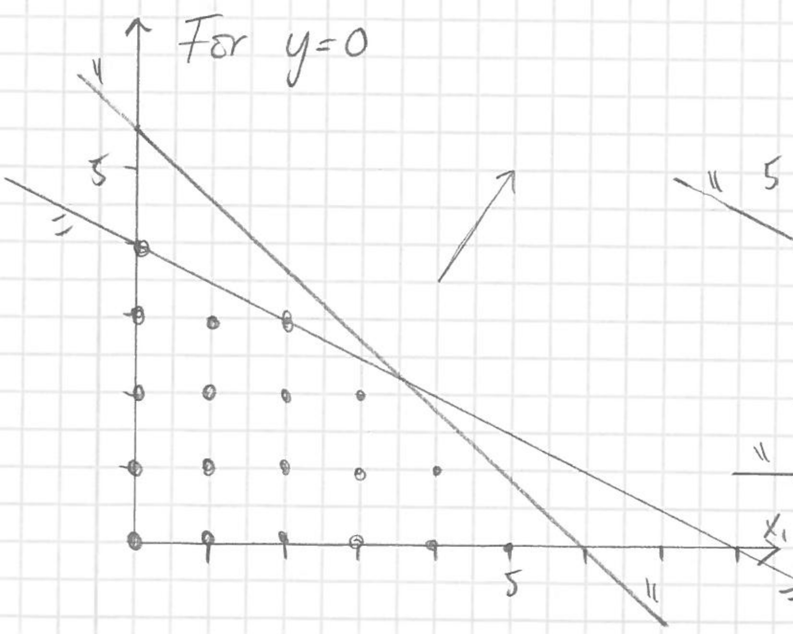
$x^{P2} = (2,3)$, $z^{P2} = 13$. Heltalig, kapa!

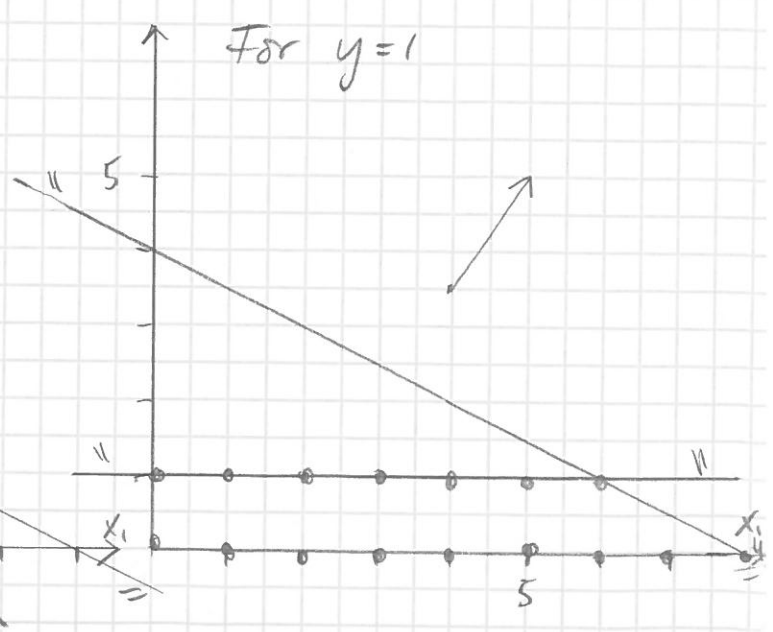
Hela trädet kapat. Optimallösning $x_A^* = (2,3)$ $z_A^* = 13$

b) Problem (P) ska tolkas så att värdet på y styr hur det tillåtna området med avseende på x_1, x_2 ser ut

$y = 0$: villkor $2x_1 + 2x_2 \leq 11$ tas med, villkor $x_2 \leq 1 + M$ redundant $\}$ Tillåtna området för (PA) erhålls

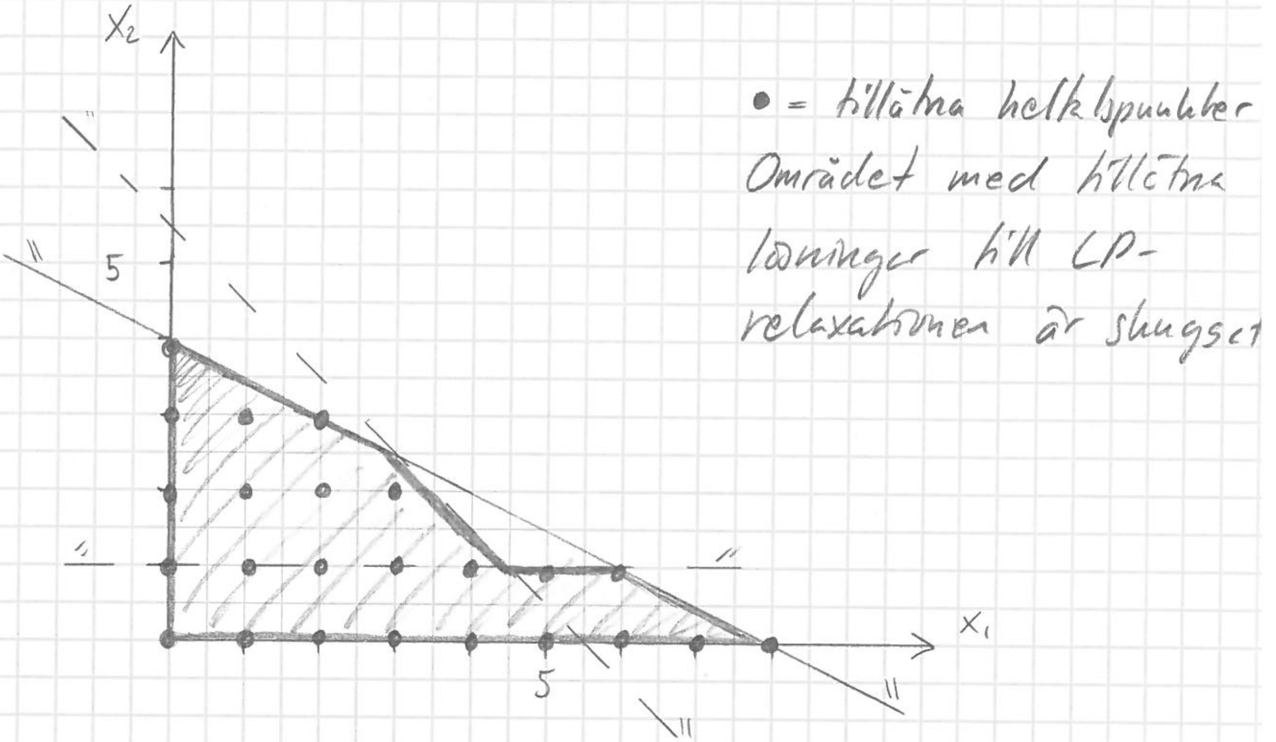
$y = 1$: villkor $2x_1 + 2x_2 \leq 11 + M$ redundant, villkor $x_2 \leq 1$ tas med $\}$ Tillåtna området för (PB) erhålls





fort. uppg. 4b

Det tillåtna området ges av unionen av området för $y=0$ och området för $y=1$.



Det optimala målfunktionsvärdet ges av

$$z^* = \max\{\underbrace{z_A^* + 6}_{\text{fallet } y=0}, \underbrace{z_B^* + 2}_{\text{fallet } y=1}\} = \{13+6, 16+2\} = 19$$

Svar: Optimallösning $y^*=0$, $x^*=(2,3)$, $z^*=19$

Uppgift 5

a)

Iteration					tabu
0	(0,0) $z=0$				
1	(1,0) $z=2$	(0,1) ny tabu $x_2=0$ $z=3$ välj!	(-1,0) otillåten map x_1	(0,-1) otillåten map x_2	
2	(1,1) $z=5$	(0,2) ny tabu $x_2=1$ $z=6$ välj!	(-1,1) otillåten map x_1	(0,0) tabu	$x_2: 1 \to 0$
3	(1,2) $z=8$	(0,3) ny tabu $x_2=2$ $z=9$ välj!	(-1,2) otillåten map x_1	(0,1) tabu	$x_2: 1 \to 0$ $x_2\ 2 \to 1$
4	(1,3) otillåten map (1) & (2)	(0,4) otillåten map x_2 & (2)	(-1,3) otillåten map x_1	(0,2) ny tabu $x_2=3$ tabu, $z=6$ välj! (ty enda tillåten)	$x_2: 2 \to 1$ $x_2: 3 \to 2$
5	(1,2) ny tabu $x_1=0$ $z=8$ välj!	(0,3) tabu	(-1,2) otillåten map x_1	(0,1) $z=3$	$x_2: 3 \to 2$ $x_2: 2 \to 3$
6	(2,2) ny tabu $x_1=1$ $z=10$ välj!	(1,3) otillåten map (2)	(0,2) tabu	(1,1) $z=5$	$x_2: 2 \to 3$ $x_1: 1 \to 0$
7	(3,2) otill. map (1) & (2)	(2,3) otill. map (1) & (2)	(1,2) tabu	(2,1) ny tabu $z=7$ välj!	$x_1: 1 \to 0$ $x_1: 2 \to 1$

Svar: Den bästa lösningen erhölls i iteration 6 och är $x^*=(2,2)$, $z^*=10$

fort. uppg. 5 b)

Talen 0, 1, 2, 3 kan representeras med hjälp av två binära tal:

$$0 = 00$$
$$1 = 01$$
$$2 = 10$$
$$3 = 11$$

Inför y_1^1, y_2^1 för att representera x_1 och
y_1^2, y_2^2 för att representera x_2

Variabelsubstitutionen blir då
$x_1 = 2y_2^1 + y_1^1$ och $x_2 = 2y_2^2 + y_1^2$
och problemformuleringen blir

$$\max z = 2(2y_2^1 + y_1^1) + 3(2y_2^2 + y_1^2) = 4y_2^1 + 2y_1^1 + 6y_2^2 + 3y_1^2$$

då
$$4(2y_2^1 + y_1^1) + 2y_2^2 + y_1^2 = 8y_2^1 + 4y_1^1 + 2y_2^2 + y_1^2 \leq 13$$
$$3(2y_2^1 + y_1^1) + 5(2y_2^2 + y_1^2) = 6y_2^1 + 3y_1^1 + 10y_2^2 + 5y_1^2 \leq 16$$
$$y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2 \in \{0, 1\}$$

c) Nej, samma sekvens kommer inte att erhållas eftersom om man ökar eller minskar värdet på y_2^1 eller y_2^2 med ett steg så motsvarar den en ändring av x_1 resp. x_2 med 2 steg. Ta första iterationen som exempel, då går man från $y_1^1 = y_2^1 = y_1^2 = y_2^2 = 0$ till $y_1^1 = y_2^1 = y_1^2 = 0$ och $y_2^2 = 1$ som motsvarar $x = (0, 2)$.

Uppgift 6

a) Steg: $t = 1,2,3,4$

Styrvariabler: $x_t = \begin{cases} 1 & \text{om föremål } t \text{ används} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Tillstånd: s_t = återstående utrymme i bivillkoret för steg t till 4

Överföringsfunktion: $s_{t+1} = s_t - a_t x_t$ (där a_t är bivillkorskoeff.)

Rekursionssamband: $f_t(s_t) = \max\limits_{x_t} \{ f_{t+1}(s_{t+1}) + c_t x_t \}$ (där c_t är målfunktionskoeff.)

Optimalvärdesfunktion: $f_t(s_t)$ = maximalt målfunktionsvärde i steg t till 4

Randvillkor: $f_5(s_5) = 0$, $s_1 = 4$, $s_5 \geq 0$

Begränsningar: $s_t = 0, \dots, 4$, $t = 1, \dots, 4$

$x_t \in \{0,1\}$ $t = 1, \dots, 4$

Steg 4:

$s_4 = 0, \dots, 4$, $x_4 \in \{0,1\}$

$s_5 = s_4 - a_4 x_4 = s_4 - 2x_4 \geq 0$

Tjänar: $f_5(s_5) + 2x_4$

x_4 \ s_4	0	1	2	3	4
0	$s_5 = 0-2\cdot0 = 0$ $0+2\cdot0 = 0$	$s_5 = 1-2\cdot0 = 1$ $0+2\cdot0 = 0$	$s_5 = 2-2\cdot0 = 2$ $0+2\cdot0 = 0$	$s_5 = 3-2\cdot0 = 3$ $0+2\cdot0 = 0$	$s_5 = 4-2\cdot0 = 4$ $0+2\cdot0 = 0$
1	$s_5 = 0-2\cdot1 = -2$	$s_5 = 1-2\cdot1 = -1$	$s_5 = 2-2\cdot1 = 0$ $0+2\cdot1 = 2$	$s_5 = 3-2\cdot1 = 1$ $0+2\cdot1 = 2$	$s_5 = 4-2\cdot1 = 2$ $0+2\cdot1 = 2$
$x_4^*(s_4)$	0	0	1	1	1
$f_4^*(s_4)$	0	0	2	2	2

fort. 6

Steg 3:

$s_3 = 0, \ldots, 4$, $x_3 \in \{0,1\}$

$s_4 = s_3 - a_3 x_3 = s_3 - 3x_3 \geq 0$

Tjänar: $f_4(s_4) + 2x_3$

x_3 \ s_3	0	1	2	3	4
0	$s_4 = 0-3\cdot0=0$ $0+2\cdot0=0$	$s_4=1-3\cdot0=1$ $0+2\cdot0=0$	$s_4=2-3\cdot0=2$ $2+2\cdot0=2$	$s_4=3-3\cdot0=3$ $2+2\cdot0=2$	$s_4=4-3\cdot0=4$ $2+2\cdot0=2$
1	$s_4=0-3\cdot1=-3$	$s_4=1-3\cdot1=-2$	$s_4=2-3\cdot1=-1$	$s_4=3-3\cdot1=0$ $0+2\cdot1=2$	$s_4=4-3\cdot1=1$ $0+2\cdot1=2$
$x_3^*(s_3)$	0	0	0	0/1	0/1
$f_3^*(s_3)$	0	0	2	2	2

Steg 2:

$s_2 = 0, \ldots, 4$, $x_2 \in \{0,1\}$

$s_3 = s_2 - a_2 x_2 = s_2 - x_2 \geq 0$

Tjänar: $f_3(s_3) + x_2$

x_2 \ s_2	0	1	2	3	4
0	$s_3=0-0=0$ $0+0=0$	$s_3=1-0=1$ $0+0=0$	$s_3=2-0=2$ $2+0=2$	$s_3=3-0=3$ $2+0=2$	$s_3=4-0=4$ $2+0=2$
1	$s_3=0-1=-1$	$s_3=1-1=0$ $0+1=1$	$s_3=2-1=1$ $0+1=1$	$s_3=3-1=2$ $2+1=3$	$s_3=4-1=3$ $2+1=3$
$x_2^*(s_2)$	0	1	0	1	1
$f_2^*(s_2)$	0	1	2	3	3

Steg 1:

$s_1 = 4$, $x_1 \in \{0,1\}$

$s_2 = s_1 - a_1 x_1 = 4 - 2x_1 \geq 0$

Tjänar: $f_2(s_2) + 3x_1$

$x_1 \backslash s_1$	4
0	$s_2 = 4 - 2 \cdot 0 = 4$, $3 + 3 \cdot 0 = 3$
1	$s_2 = 4 - 2 \cdot 1 = 2$, $2 + 3 \cdot 1 = 5$
$x_1^*(s_1)$	1
$f_1^*(s_1)$	5

Nysta upp: $x_1 = 1 \Rightarrow s_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow s_3 = 2 \Rightarrow$
$x_3 = 0 \Rightarrow s_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 1$

Svar: $x^* = (1, 0, 0, 1)$, $z^* = 5$

b) Det enda som behöver göras om för att få den nya lösningen är uppnystningen med ett nytt värde på s_2:

$x_1 = 1 \Rightarrow s_2 = 4 - 3 \cdot 1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow$
$s_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow s_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$

Så med de nya förutsättningarna blir lösningen $x^* = (1, 1, 0, 0)$

Målfunktionsvärdet för lösningen blir
$f_1(4) = f_2(1) + 3 \cdot x_1 = 1 + 3 = 4$