Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP37/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	16:e mars 2016
Tid:	8.00–13.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. Ett **A4-blad med anteckningar** på båda sidor.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Ett tågbolag har problem med sina 4 tågavgångar mellan Katrineholm och Linköping och de vet redan nu att alla resenärer inte kommer att få plats enligt sina biljetter. Uppgiften syftar till att hjälpa tågbolaget med planeringen för att minimera kostnaden för dessa problem.

Numrera avgångarna i kronologisk ordning, $i = 1, \ldots, 4$, där avgång $i = 1$ är först. Antalet resenärer inbokade på avgång i är r_i och det maximala antalet resenärsplatser på avgång i är u_i, där $i = 1, \ldots, 4$. Att låta en resenär vänta till nästkommande avgång är associerat med en kostnad c^1, att låta en resenär vänta till två avgångar senare är associerat med en kostnad c^2, och att låta en resenär vänta längre än så vill man inte ska vara möjligt. Tågbolaget kan, som nödlösning, också köpa in resenärens resa via en avgång med ett annat bolag. Detta är associerat med en kostnad k, oavsett vilken avgång resenären ursprungligen skulle åkt med.

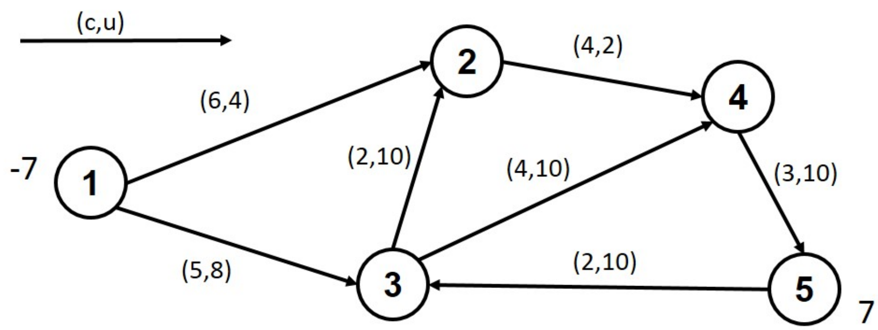
a. Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver hur tågbolaget ska fördela sina resenärer till lägsta möjliga kostnad. **(2p)**

b. Ett taxibolag erbjuder sig att transportera 4 resenärer vid avgång $i = 2$ för en total kostnad av l kr. Utöka ditt nätverk i deluppgift **a** med denna möjlighet eller motivera varför så inte är möjligt. En nej-motviering bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge en poäng. Med ett kortfattat svar menas ungefär fem till sex rader text, med normalstor handstil. **(1p)**

c. Antag att du använt en lösare och löst problemet i deluppgift **a**. Kan man baserat på lösningen göra någon förhandsbedömning av om erbjudandet i deluppgift **b** är attraktivt eller ej? Motivera ditt svar! Uppgiften bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge en poäng. Med ett kortfattat svar menas ungefär 10 rader text, med normalstor handstil. **(1p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande nätverk där kostnad och övre gräns för flödet på bågarna ges som c respektive u i figuren. Den undre gränsen på flödet är $l = 0$ för samtliga bågar. Av figuren framgår att nod 1 är en källa med styrka 7 och nod 5 är en sänka med styrka 7.



Låt nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 5$, $y_4 = 9$, $y_5 = 12$ vara givna.

a. Antag att de givna nodpriserna svarar mot en basträd och avgör vilka av bågarna som då är basbågar. **(1p)**

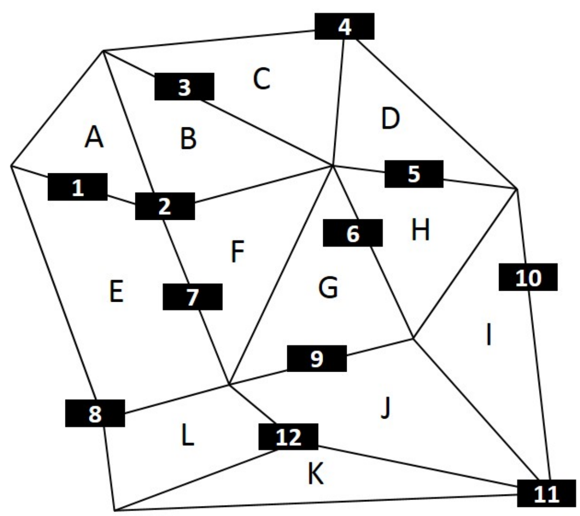
b. För basträdet i deluppgft **a**, antag att icke-basbågar har ett flöde som är 0. Beräkna flödet på samtliga bågar och avgör om lösningen är optimal. **(1p)**

c. Ange samtliga primalt tillåtna flöden som går att associera med basträdet som erhölls i deluppgft **a** och avgör vilka av dessa som är optimala. **(1p)**

Uppgift 3.

Denna uppgift syftar till att hjälpa till med planeringen av hur första-hjälpen-utrustning ska placeras vid en festival. Nedanstående figur ger en schematisk bild av festivalområdet och dess delområden A-L. Rutorna som är numrerade med 1 till 12 respesenterar möjliga positioner att placera första-hjälpen-utrustning på, och om en sådan ruta tangerar kanten till ett delområde så innebär det att utrustningen är tillgänglig för det delområdet.

Festivalarrangören vill, av kostnadsskäl, placera ut så få enheter första-hjälpen-utrustning som möjligt med hänsyn till kravet att alla delområden ska ha tillgång till utrustning.



a. Introducera variabeln

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{om utrustning placeras vid position } i, \ i = 1, \ldots, 12, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

och formulera en linjär heltalsmodell för problemet att välja vid vilka positioner som utrustning ska placeras. Modellen behöver inte vara på summaform.

(1p)

b. Studera samma typ av problemställning som i deluppgift **a**, men här ska du ge en generell modell på summaform, oberoende av det exakta utseendet på kartan. Du har tillgång till följande notation (och motsvarande data) och väljer själv vilken du behöver använda i din formulering. Låt K vara mängden av delområden, låt I vara mängden av möjliga positioner, låt O_i vara de delområden som täcks av position i, $i \in I$, och låt P_k vara de positioner som täcker delområde k, $k \in K$. Ytterligare notation i form av parametrar eller mängder får ej införas. **(1p)**

c. Arrangören vill bemanna med sjukvårdspersonal någonstans på festivalområdet. Man har sett att det finns lämpliga platser för detta i form av par av positioner där först-hjälpen-utrustning kan placeras. (Detta motiveras av att dessa par av positioner ligger nära varandra och det är lämpligt att ha sjukvårdspersonalen stationerad mellan dessa positioner.) Låt mängden IJ innehålla par av positioner (i, j) sådana att $i \in I$ och $j \in I$. Utöka din modell från deluppgift **b** till att innehålla kravet att minst ett par av positioner i mängden IJ används (vilket i sin tur ger minst en lämplig plats att placera sjukvårdspersonal på).

(1p)

Uppgift 4.

Denna uppgift handlar om följande tre problem.

$$\begin{array}{llll} \text{(PA)} & \max z_A = 2x_1 + 3x_2 & \text{(PB)} & \max z_B = 2x_1 + 3x_2 \\ & \text{då} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 & & \text{då} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & \phantom{\text{då}} \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 11 & & \phantom{\text{då}} \quad x_2 \leq 1 \\ & \phantom{\text{då}} \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} & & \phantom{\text{då}} \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \max z = 2x_1 + 3x_2 + 6(1-y) + 2y \\ & \text{då} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & \phantom{\text{då}} \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 11 + My \\ & \phantom{\text{då}} \quad x_2 \leq 1 + M(1-y) \\ & \phantom{\text{då}} \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \\ & \phantom{\text{då}} \quad y \in \{0, 1\} \end{array}$$

I deluppgift **b** är det bra att veta att för (PB) gäller att $x^* = (8, 0)$, $z_B^* = 16$.

a. Använd Land-Doig-Dakins algoritm för att lösa problem (PA). Använd djup-först-sökning och avsök $\leq$-grenen först. Om det finns mer än en variabel med fraktionellt värde, förgrena över den variabel som har lägst index. Lös subproblemen grafiskt. Ange den erhållna lösningen i ditt svar. **(2p)**

b. Studera problem (P) för heltaliga värden på y. Rita **en** figur med avseende på variablerna x_1 och x_2 och markera i denna figur:

- De tillåtna heltalslösningarna med avseende på x_1 och x_2.
- De tillåtna fraktionella lösningarna med avseende på x_1 och x_2 (under antagandet att problemet LP-relaxerats med avseende på x_1 och x_2).

För problem (P), ange vilken lösning som är optimal och ange denna lösnings målfunktionsvärde. **(2p)**

Uppgift 5.

Följande problem ska lösas med tabusökning.

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{då} \quad 4x_1 + x_2 &\leq 13 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 16 \\ x_1, x_2 &\in \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Specifikation för tabusökningen:

- Startlösning: x_1=0, $x_2 = 0$
- Omgivning: De lösningar som erhålls då en variabels värde ökar eller minskar med ett steg
- Tabu: Att en variabel byter tillbaka till det senaste värde den bytte från. Tabulistans längd: 2
- Det är tillåtet att bryta mot tabu om det inte finns någon annan tillåten lösning att gå till
- Antal iterationer: 7

a. Lös det givna problemet med tabusökning enligt specifikationen ovan. Redovisa tydligt vilken lösning du erhållit. **(2p)**

b. Gör en variabelsubstitution i det givna problemet så att problemet blir binärt och teckna det omformulerade problemet. Ett minimalt antal variabler ska användas och inga bivillkor får läggas till eller tas bort. **(1p)**

c. Antag att du löser det givna problemet med tabusökning applicerat på den binära formuleringen i deluppgift **b**. Kommer samma sekvens av lösningar som i deluppgift **a** att erhållas? Motivera ditt svar kortfattat och tydligt, det är kvalitén på motiveringen som är avgörande för bedömningen av uppgiften. Med kortfattat menas här 5 till 10 rader text. **(1p)**

Uppgift 6.

Följande kappsäcksproblem ska lösas med dynamisk programmering

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

a. Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, formulera problemet genom att redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en erhållen optimallösning i svaret. **(2p)**

b. Tolka det givna problemet som att det handlar om att ett antal föremål ska packas i en ryggsäck, och att packningen sker i nummerordning, $t = 1, \ldots, 4$. Om motsvarande variabel $x_t = 1$ ska föremålet packas och om $x_t = 0$ ska föremålet förbli opackat.

Antag att du löst problemet ovan och att du börjar packa ryggsäcken enligt din lösning. Eftersom $x_1 = 1$ i optimallösningen börjar du med att packa föremål 1, och när du gör det upptäcker du att den tar upp 3 platser istället för 2 i ryggsäcken. Använd dina beräkningar i Uppgift 6a för att finna den bästa möjliga lösningen givet att föremål 1 måste vara med i ryggsäcken och att dess bivillkorskoefficient är 3. **(1p)**