Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 29:e oktober 2019

Uppgift 1.

a) Variabeldefinition:

x_{ijk} = antal ton av gödselsort k som skickas från gård i till åker j.

Målfunktion: $$\min\ z = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} T_{ij}c_k x_{ijk}$$

Bivillkor:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\frac{1}{a_k}x_{ijk} & \le & s_i, & i\in I \quad \text{[tillgång]} \\ \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} r_k x_{ijk} & = & d_j, & j\in J \quad \text{[efterfrågan]} \\ x_{ijk} & \ge & 0\,, & i\in I,\ j\in J,\ k\in K \end{array}$$

b) Inför två nya variabler:

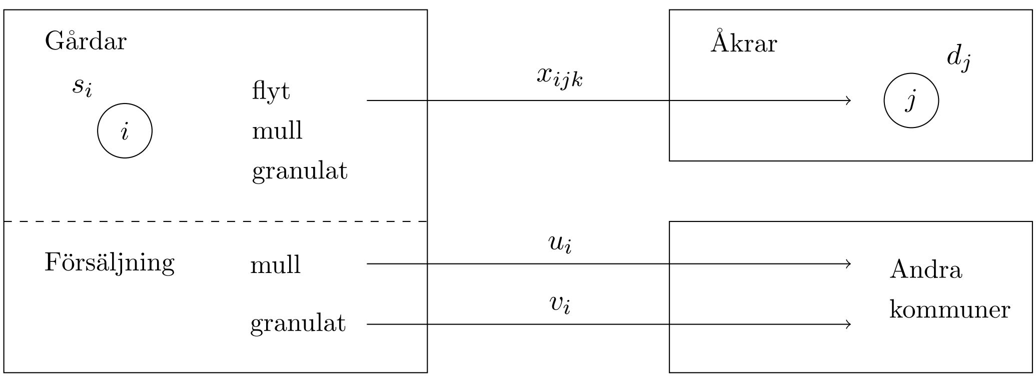
u_i = antal ton av gödselsort `mull` som säljs vidare från gård i.

v_i = antal ton av gödselsort `granulat` som säljs vidare från gård i.

Målfunktion: $$\min\ z = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} T_{ij}c_k x_{ijk} - p\sum_{i\in I}u_i - q\sum_{i\in I}v_i$$

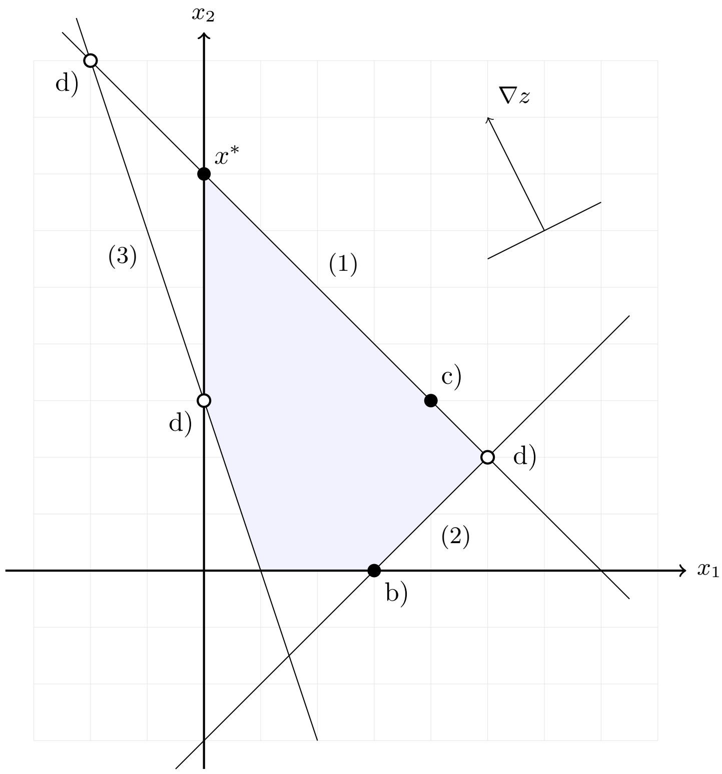
Bivillkor:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\frac{1}{a_k}x_{ijk} + \frac{1}{a_{\mathrm{M}}}u_i + \frac{1}{a_{\mathrm{G}}}v_i & = & s_i, & i\in I \quad \text{[tillgång]} \\ \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} r_k x_{ijk} & = & d_j, & j\in J \quad \text{[efterfrågan]} \\ x_{ijk} & \ge & 0\,, & i\in I,\ j\in J,\ k\in K \\ u_i,\ v_i & \ge & 0\,, & i\in I \end{array}$$



Uppgift 2.

Det givna linjära maximeringsproblemet.



a) Problemet på standardform.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\max & z = & -x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 7 \quad (1) \\
& & x_1 & - & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 3 \quad (2) \\
& & 3x_1 & + & x_2 & & & & & - & s_3 & = & 3 \quad (3) \\
& & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

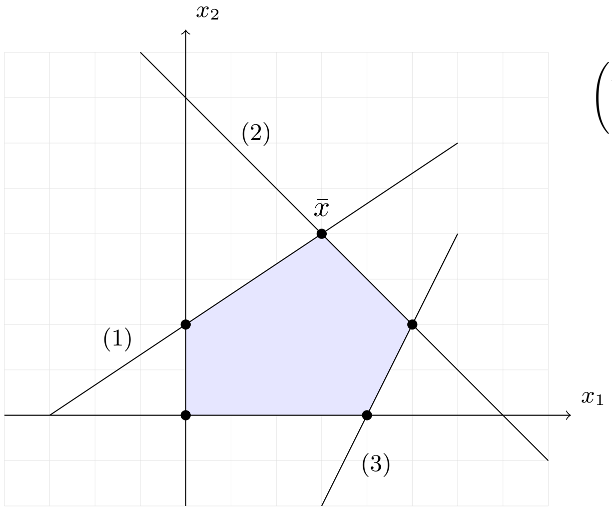
b) Punkten $\bar{x} = (3, 0)^T$ återfinns i korsningen mellan villkor (2) och teckenkravet $x_2 \geq 0$, och svarar således mot en baslösning. Basvariabler är x_1, s_1 och s_3.

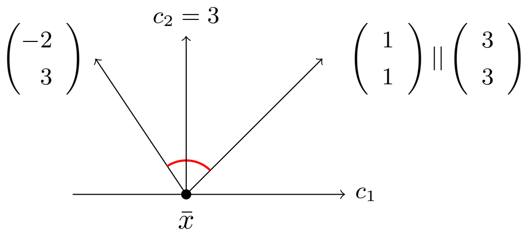
c) Punkten $\hat{x} = (4, 3)^T$ är en randpunkt, varför den <u>inte</u> svarar mot en baslösning (eftersom den inte återfinns i korsningen mellan två eller fler bivillkor).

d) Punkten $x^* = (0, 7)^T$ är problemets optimallösning, och de baslösningar som är närliggande återfinns i punkterna $(-2, 9)^T$, $(0, 3)^T$ och $(5, 2)^T$. Den första punkten svarar mot en otillåten baslösning medan de andra två är tillåtna baslösningar.

Uppgift 3.

a) Vi ritar upp det tillåtna området.





I punkten $\bar{x}$ är bivillkor (1) och (2) aktiva, och motsvarande bivillkorsgradienter är $(-2, 3)^T$ och $(1, 1)^T$.

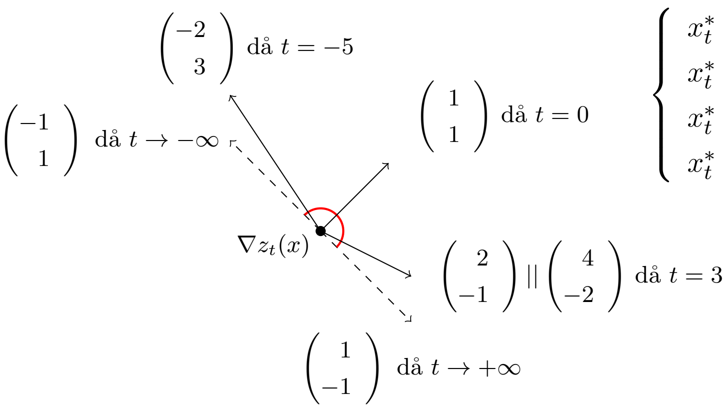
Vi får alltså att $-2 \leq c_1 \leq 3$.

b) Beräkna reducerad kostnad: $\bar{c}_N^{\mathrm{T}} = c_N^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N \leq 0$ (optimalitetskrav för max-problem). Från optimaltablån kan vi se att basen är $\{x_2, x_1, s_3\}$, i den ordningen, vilket ger $c_N^{\mathrm{T}} = (0, 0)$, $c_B^{\mathrm{T}} = (3, c_1, 0)$, och $B^{-1}N$ finns i optimaltablån under icke-basvariablerna.

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_N^{\mathrm{T}} &= (0,0) - (3, c_1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} = (0,0) - \frac{1}{10}(6 - 2c_1, 12 + 6c_1) \\
&= \frac{2}{10}(c_1 - 3, -3c_1 - 6) \leq 0
\end{aligned}
$$

vilket ger kravet $-2 \leq c_1 \leq 3$. Alltså, $\bar{x}$ är optimal då $-2 \leq c_1 \leq 3$.

c) Analysera vilka riktningar som målfunktionen kan peka i. Vi får följande baslösningar.



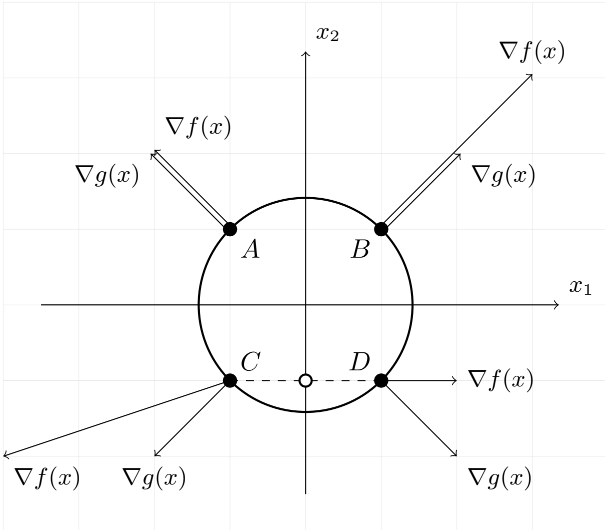
$$
\begin{cases}
x_t^* = (0, 2)^T & t \leq -5 \\
x_t^* = (3, 4)^T & -5 \leq t \leq 0 \\
x_t^* = (5, 2)^T & 0 \leq t \leq 3 \\
x_t^* = (4, 0)^T & 3 \leq t
\end{cases}
$$

Ett explicit uttryck för målfunktionsvärdet blir då
$$
z^*(t) = \begin{cases}
2 - 2t & t \leq -5 \\
7 - t & -5 \leq t \leq 0 \\
7 + 3t & 0 \leq t \leq 3 \\
4 + 4t & 3 \leq t
\end{cases}.
$$

Uppgift 4.

Illustration av problemet. (Se även 3d-bilder på sida 6.)

$$\begin{aligned} \min \quad f(x) &= \tfrac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2 \\ \text{då} \quad g(x) &= x_1^2 + x_2^2 = 2 \\ \nabla f(x) &= \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 1 \end{pmatrix} \\ \nabla g(x) &= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



a) Teckna KKT-villkoren, dvs. primal tillåtenhet, komplementaritet och dual tillåtenhet.

1. Primala tillåtenhet	2. Komplementaritet	3. Dual tillåtenhet
$g(x) = x_1^2 + x_2^2 = 2$	$v \cdot (\ g(x) - 2\ ) = 0$	$\nabla f(x) = v \cdot \nabla g(x)$

Notera att eftersom vi har ett likhetsvillkor är multiplikatorn v fri.

b) Problemet är <u>inte</u> konvext eftersom det tillåtna området är randen på en cirkel. För ett motbevis, välj t.ex. de tillåtna punkterna $C = (-1,-1)^T$ och $D = (1,-1)^T$ och välj t.ex. $\lambda = 0.5$ vilket ger den nya punkten $E = (0,-1)^T$ som inte uppfyller bivillkoret $g(x) = 2$.

c) De fyra punkterna $x = (\pm 1, \pm 1)^T$ är markerade i figuren ovan, tillsammans med tillhörande målfunktionsgradienter $\nabla f(x)$ och bivillkorsgradienter $\nabla g(x)$.

- Vi ser genast att gradienterna inte är parallella för punkterna $C = (-1,-1)^T$ och $D = (1,-1)^T$, vilket betyder att dessa inte är KKT-punkter.
- Däremot, för punkterna $A = (-1,1)^T$ och $B = (1,1)^T$ är $\nabla f(x)$ och $\nabla g(x)$ parallella, vilket betyder att dessa är KKT-punkter.

För $A = (-1,1)^T$ är multiplikatorn $v = 1$ och för $B = (1,1)^T$ är multiplikatorn $v = 2$.

d) Eftersom problemet inte är konvext garanterar inte KKT-villkoren optimalitet.

Vi kan däremot alltid beräkna målfunktionsvärdet för de fyra punkterna:

$$f(-1,1) = 2.5, \ f(1,1) = 4.5, \ f(-1,-1) = 2.5, \ f(1,-1) = 0.5$$

Minimeringsproblem, vi kan alltså utesluta samtliga punkter förutom $D = (1,-1)^T$.

Uppgift 5.

Vi börjar med att ta fram gradient och Hessian för $f(x)$, samt Hessianens invers.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2 \\ 4x_3 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Notera att variabel x_3 inte hänger ihop med x_1 och x_2, det är alltså möjligt att bryta ner $f(x)$ i två delfunktioner, en som beror av x_1 och x_2 och en som endast beror på x_3.

Därefter är det enkelt att visa att $f(x)$ är en strikt konvex funktion, och det är också rättframt att hitta inversen till $H(x)$ utan att invertera hela matrisen.

a) BL med intervallhalvering, börja i punkten $x^{(0)} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

$$d_{BL} \quad = \quad -\nabla f(x^{(0)}) \quad = \quad (\ 0,\ -1,\ 0\ )^T$$

$$x(t) \quad = \quad x^{(0)} + t \cdot d_{BL} \quad = \quad (\ 1,\ 0,\ 0\ )^T + t \cdot (\ 0,\ -1,\ 0\ )^T \ = \ (\ 1,\ -t,\ 0\ )^T$$

Vi får att

$$\begin{aligned} f(t) &= \tfrac{1}{2}(1)^2 + (1)(-t) + (-t)^2 + 2(0)^2 - (1) \ = \ t^2 - t - \tfrac{1}{2} \\ f'(t) &= 2t - 1 \quad \left[= \ 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \tfrac{1}{2} \ \right] \end{aligned}$$

Börja med att bekräfta att intervallets ändpunkter ger oss olika tecken på derivatan.

$$f'(0) \ = \ -1 \ < \ 0, \quad f'(8) \ = \ 2 \cdot 8 - 1 \ = \ 15 \ > \ 0$$

Vi ser att derivatan byter tecken någonstans mellan 0 och 8. Med en tabell enligt boken får man:

k	α_k	m_k	β_k	$f'(m_k) = 2 \cdot m_k - 1$	$\beta_k - \alpha_k$
0	0	4	8	$2 \cdot 4 - 1 \ = \ 7 \ > \ 0$	8
1	0	2	4	$2 \cdot 2 - 1 \ = \ 3 \ > \ 0$	4
2	0	1	2	$2 \cdot 1 - 1 \ = \ 1 \ > \ 0$	2
3	0	$\frac{1}{2}$	1	$2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \ = \ 0$	1

Vi hittar ett optimalt steg $t^* = \frac{1}{2}$ efter tre intervallhalveringar!

Ny punkt blir $x^{(1)} = x^{(0)} + t^* \cdot d_{BL}$,

$$x^{(1)} \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^{(1)}) \ = \ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Den nya punken är inte ett lokalt optimum ty $||\nabla f(x^{(1)})|| > 0$.

b) Eftersom $f(x)$ är strikt konvex finns ett unikt lokalt optimum, som då också är globalt optimum. Använd Newtons metod, börja i punkten $x^{(0)} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

$$d_{NM} = -H^{-1}(x^{(0)})\nabla f(x^{(0)}) = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

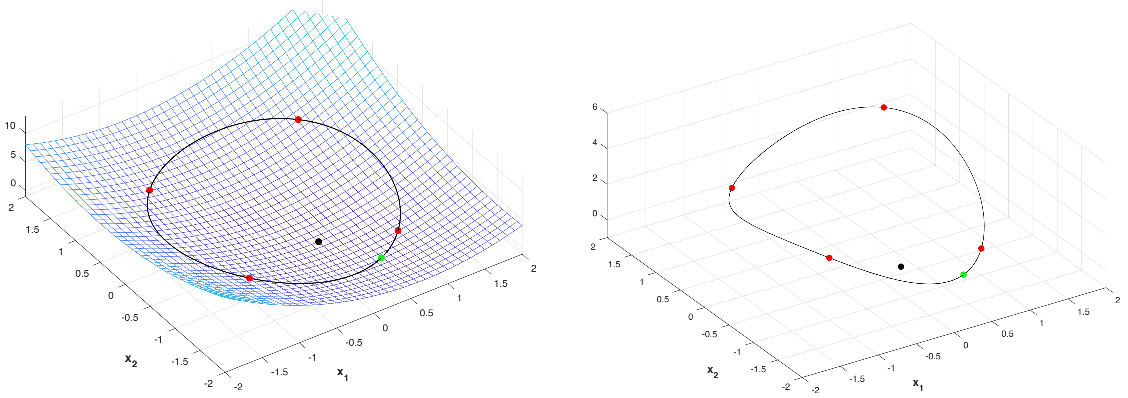
$$x^{(1)} = x^{(0)} + d_{NM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi är klara efter första iterationen eftersom $\nabla f(x^{(1)}) = (0, 0, 0)^T$, och den erhållna punkten $x^{(1)} = (2, -1, 0)^T$ är globalt optimum för problemet.

Illustration av problemet i Uppgift 4.

$$\min \quad f(x) = \tfrac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2$$

$$\text{då} \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 = 2$$



Bilden till vänster visar hur målfunktionen $f(x)$ ser ut, och det tillåtna området $g(x) = 2$ är illustrerat med hjälp av den svarta cirkeln. Till höger är själva funktionsytan för $f(x)$ borttagen, vilket ger en tydlig bild över målfunktionsvärdet för samtliga tillåtna punkter.

Funktionen $f(x)$ är en konvex funktion, men det tillåtna området är inte konvext eftersom det endast består av randpunkterna på cirkeln. Den svarta punkten $x^*_{\text{UB}} = (0.2, -0.6)^T$ svarar mot minimum till $f(x)$, så kallat obegränsat optimum till $f(x)$, vilket inte är en tillåten punkt. De fyra röda punkterna svarar mot $x = (\pm 1, \pm 1)^T$, och slutligen den gröna punkten $x^* \approx (0.58, -1.29)^T$ som är globalt minimum till problemet.