Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	29:e oktober 2019
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3–5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh
Jourhavande lärare:	Nils-Hassan Quttineh 013-28 21 85

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

En kommun bestämmer sig för att samordna behovet av gödsel bland sina bönder, eftersom man har uppmärksammat att vissa områden är undernärda (vilket är dåligt) samtidigt som andra områden lider av övergödning (vilket inte heller är bra). Gårdar med många djur "producerar" ett överskott av gödsel som slängs ut på de närliggande åkrarna och leder till övergödning. Gårdar med få djur, som har ett underskott av gödsel, köper istället in dyr konstgödsel för att täcka sina behov.

Gödsel i sin naturliga form beskrivs bäst som "blöt" (s.k. flytgödsel) och har två stora nackdelar: dels väger den mycket och dels är den opraktisk att hantera. Detta gör det dyrt och svårt att flytta gödsel mellan gårdar och åkrar. Kommunen vill nu testa en ny "avvattnings"-teknik som kan omvandla flytgödsel till mull och granulat, två nya gödselsorter som är torra (dvs. lätta) och enkla att hantera.

Låt mängderna $I = \{1, \dots, m\}$ och $J = \{1, \dots, n\}$ ange de m gårdarna och de n åkerområdena i kommunen, och låt $K = \{\texttt{flyt}, \texttt{mull}, \texttt{granulat}\}$ ange de olika gödselsorterna. Antag att varje gård $i \in I$ har tillgång till den nya tekniken som omvandlar 1 ton flytgödsel till antingen 200 kg mull (0.2 ton) eller 50 kg granulat (0.05 ton). Det är också möjligt att skicka flytgödsel direkt från en gård till ett åkerområde (omvandlingsfaktor 1.0), även om det troligtvis inte är lönsamt. Låt parameter a_k ange dessa omvandlingsfaktorer (1.0, 0.2 samt 0.05) för $k \in K$.

En viktig egenskap hos den nya tekniken är att inga näringsämnen försvinner, vilket gör att andelen näring (koncentrationen av näringsämnen) i de nya gödselsorterna ökar. Låt parameter r_k ange andelen näring i respektive gödselsort $k \in K$.
(Andelen näring är 0.02 för flytgödsel, 0.10 för mull och 0.15 för granulat. Exempelvis: 1 ton flytgödsel innehåller endast $1000 \cdot 0.02 = 20$ *kg näring medan 1 ton mull innehåller* $1000 \cdot 0.10 = 100$ *kg näring.)*

Antag att det finns s_i ton flytgödsel tillgängligt på gård $i \in I$, och att det finns ett känt behov av d_j ton näringsämnen för åkerområde $j \in J$. Parameter T_{ij} anger avståndet (i km) mellan gård i och åkerområde j, och transportkostnaden är c_k kr per ton och km, där $k \in K$. Kommunen önskar en linjär optimeringsmodell som minimerar de totala transportkostnaderna, samtidigt som den mängd näring som varje åkerområde efterfrågar uppfylls exakt.

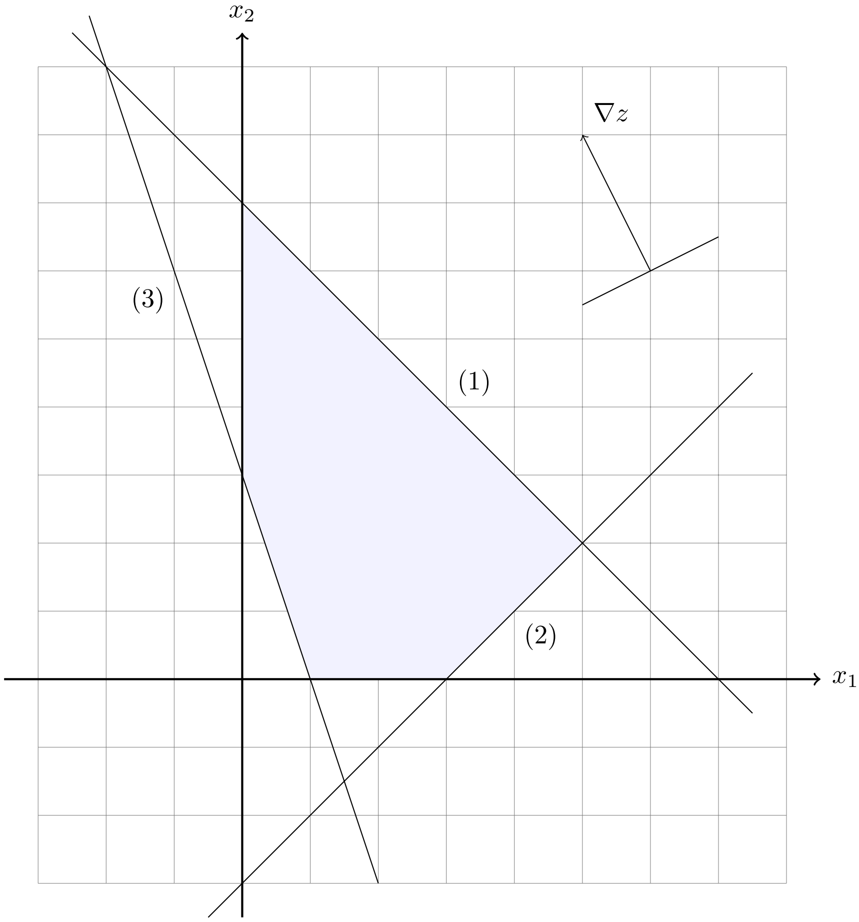
a) Antag att gårdarna inte måste skicka iväg allt tillgängligt gödsel. Skriv ner tydliga variabeldefinitioner och ge en linjär optimeringsmodell som omfördelar kommunens gödsel till så låga transportkostnader som möjligt. **(3p)**

b) Antag nu istället att inget gödsel får finnas kvar på gårdarna i flytande form, däremot som mull eller granulat. Detta överskott kan nämligen säljas vidare till andra kommuner, där mull säljs för p kr/ton och granulat för q kr/ton.

Modifiera modellen till dessa nya förutsättningar, så att potentiella intäkter från försäljning av mull och granulat tas hänsyn till. **(1p)**

Uppgift 2.

Betrakta det linjära maximeringsproblem som är givet i bilden nedan.



a) Tolka bilden och skriv ned motsvarande LP-problem på standardform. Alla koefficienter i problemet ska vara heltaliga. **(1p)**

b) Svarar punkten $\bar{x} = (3, 0)^T$ mot en baslösning?

- Om ja, ange vilka variabler som är basvariabler.
- Om nej, motivera varför. **(1p)**

c) Svarar punkten $\hat{x} = (4, 3)^T$ mot en baslösning?

- Om ja, ange vilka variabler som är basvariabler.
- Om nej, motivera varför. **(1p)**

d) Ange samtliga baslösningar som är närliggande problemets optimallösning och ange huruvida de är tillåtna eller inte. **(1p)**

Uppgift 3.

Betrakta följande optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\max & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & \\
\text{då} & & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\
& & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Rita det tillåtna området och markera samtliga tillåtna baslösningar. Antag att $c_2 = 3$ och avgör grafiskt för vilka värden på c_1 som punkten $\bar{x} = (3, 4)^T$ är optimal. Redovisa tydligt hur du kommer fram till dessa gränser, använd både figuren och kommentarer för detta ändamål. **(1p)**

b) Om slackvariabler s_1, s_2 och s_3 införs, och problemet löses med simplexmetoden för $c_1 = 1$ och $c_2 = 3$ erhålls följande optimaltablå.

bas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	0	0	0.4	1.8	0	15
x_2	0	0	1	0.2	0.4	0	4
x_1	0	1	0	−0.2	0.6	0	3
s_3	0	0	0	0.6	−0.8	1	6

Använd informationen i optimaltablån för att beräkna för vilka värden på c_1 som punkten $\bar{x} = (3, 4)^T$ är optimal. **(1p)**

c) Antag nu att $c_1 = 1 + t$ och $c_2 = 1 - t$, där $t \in \mathbb{R}$. Avgör vilka av de tillåtna baslösningarna som kan vara optimala. Teckna ett explicit uttryck, $z^*(t)$, för hur det optimala målfunktionsvärdet beror av värdet på t. **(2p)**

Uppgift 4.

Studera följande icke-linjära problem.

$$\begin{array}{llcl} \min & f(x) & = & \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2 \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 & = & 2 \end{array}$$

Svara på följande frågor.

a) Teckna KKT-villkoren för problemet. **(1p)**

b) Avgör om problemet är konvext. Ett matematiskt bevis eller motexempel krävs för att få poäng. **(1p)**

c) Betrakta de fyra punkterna $x = (\pm 1, \pm 1)^T$ en i taget. Avgör grafiskt om någon av dessa punkter uppfyller KKT-villkoren. För de punkter som är KKT-punkter, ange även värdet på motsvarande multiplikator. **(2p)**

d) Av de fyra punkterna i deluppgift **c)**, finns det några av dem som man med säkerhet kan säga inte är globalt optimum till problemet? **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta följande icke-linjära funktion.

$$\min \quad f(x) \;=\; \tfrac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1$$

Vi utgår från startpunkten $x^{(0)} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

a) Utför en iteration med Brantaste lutningsmetoden (BL).

- Använd intervallhalveringsmetoden för att bestämma steglängden.
  Utgå från intervallet $[0, 8]$ och avbryt så snart intervallets längd är mindre än $\epsilon = 0.1$.
- Är den erhållna punkten efter en iteration av BL ett lokalt minimum? Om ja, är punkten även ett globalt optimum?

(2p)

b) Utför en iteration med Newtons metod (NM).

- Är den erhållna punkten efter en iteration av NM ett lokalt minimum? Om ja, är punkten även ett globalt optimum?

(2p)