Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 20:e augusti 2019

Uppgift 1.

a) Variabeldefinition:

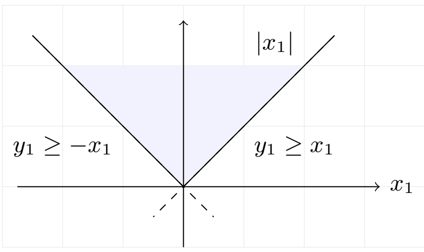
x_i = antal enheter (á 100 gram) av livsmedel i som ska ätas,
där i =1. bröd, 2. mjölk, 3. ost, 4. potatis, 5. fisk

Målfunktion: $\min\ z = 2.0x_1 + 3.5x_2 + 8.0x_3 + 1.5x_4 + 11.0x_5$

Bivillkor:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr l}
1.0x_1 & + & 5.0x_2 & + & 9.0x_3 & + & 0.1x_4 & + & 7.0x_5 & \geq & 90 & \text{[fett]} \\
15.0x_1 & + & 11.7x_2 & + & 0.4x_3 & + & 22.6x_4 & & & \geq & 250 & \text{[kolhydr.]} \\
90x_1 & + & 120x_2 & + & 106x_3 & + & 97x_4 & + & 130x_5 & \geq & 2200 & \text{[kalorier]} \\
4.0x_1 & + & 8.0x_2 & + & 7.0x_3 & + & 1.3x_4 & + & 8.0x_5 & \leq & 120 & \text{[protein]} \\
 & & x_2 & & & & & & & \leq & 5 & \text{[mjölk]} \\
 & & & & & & & & x_5 & \geq & 1 & \text{[fisk]} \\
x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

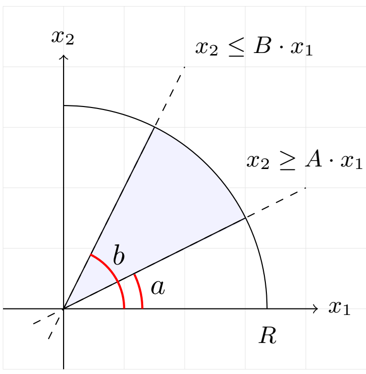
b) Absolutbeloppet av en variabel, i det här fallet x_1, går att modellera med hjälp av linjära bivillkor, men endast under förutsättningen att målfunktionen ska <u>minimeras</u>.



Eftersom funktionen $|x_1|$ är en konvex funktion blir alltså problemet konvext endast om målfunktionen ska minimeras. (Bivillkoren binder åt rätt håll.)

Inför en hjälpvariabel y_1 och lägg till kraven $y_1 \geq -x_1$ och $y_1 \geq x_1$ som bivillkor, samt ersätt termen "+ $|x_1|$" med "+ y_1" i målfunktionen. Om $f(x)$ istället ska maximeras fungerar inte denna omskrivning av absolutbeloppet.

c) Det tillåtna området som beskrivs är ett cirkelsegment i första kvadranten.



Lutningen för en linje kan beräknas som $k = \tan\theta$, vilket kan användas för att få fram två linjära bivillkor.

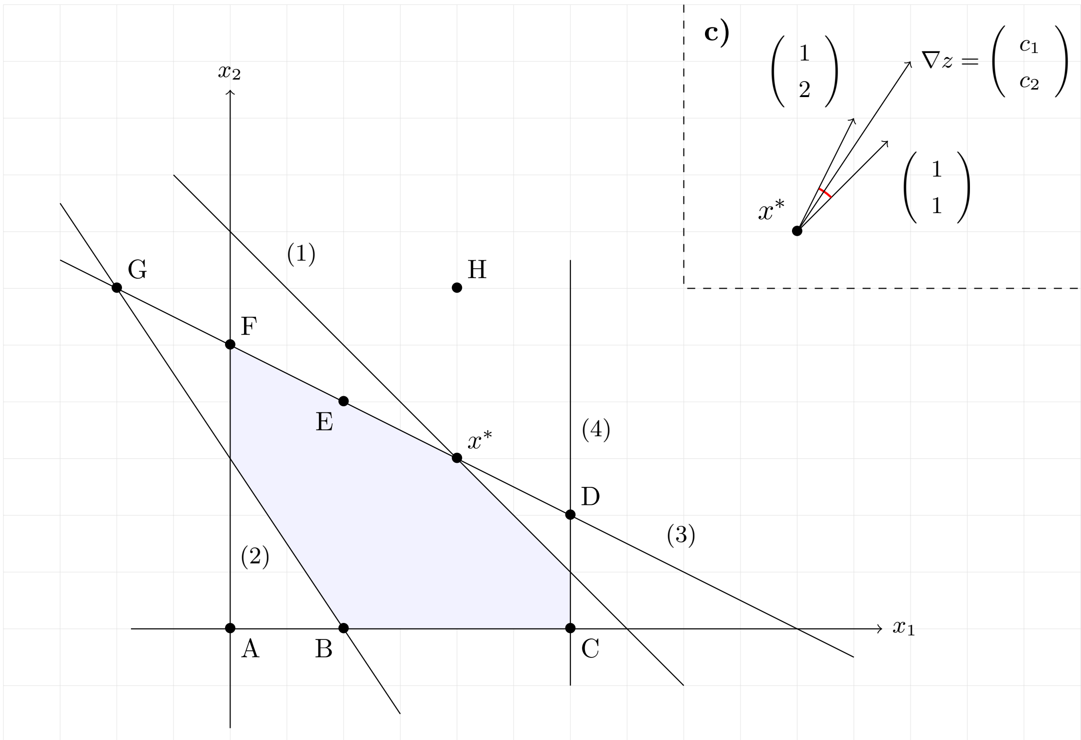
Med $A = \tan a$ och $B = \tan b$ får vi olikheterna $x_2 \geq Ax_1$ och $x_2 \leq Bx_1$.

Slutligen begränsar cirkeln också, och allt som allt får vi bivillkoren:

$$Ax_1 \leq x_2 \leq Bx_1 \text{ och } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$$

Uppgift 2.

Rita upp det tillåtna området.



a) Problemet på standardform.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcrl}
\max & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & & = & 7 & (1) \\
& & 3x_1 & + & 2x_2 & & & - & s_2 & & & & = & 6 & (2) \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & s_3 & & = & 10 & (3) \\
& & & & x_2 & & & & & & & + s_4 & = & 6 & (4) \\
& & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & , s_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Otillåtna baslösningar: A, D och G. Tillåtna baslösningar: B, C och F.

(Punkten H är otillåten, och punkten E är tillåten, men dom är <u>inte</u> baslösningar.)

c) Punkten $(4, 3)^T$ är en optimallösning till problemet så länge målfunktionsgradienten tillhör den kon som spänns upp av bivillkorsgradienterna för (1) och (3), dvs. de aktiva bivillkoren i punkten. Från bilden ovan kan vi se att detta svarar mot

$$\nabla z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0$$

vilket går att förenkla till kravet $c_1 \leq c_2 \leq 2c_1$. Det går också bra att härleda dessa krav via det duala problemet, genom att utnyttja komplementaritet och teckenkrav.

Uppgift 3.

Känslighetsanalys.

a) Minska målfunktionskoefficient (för x_1) med 1 steg, från 5 till 4.

Intervallet för c_1 är $[3.5, +\infty)$, alltså en ändring inom intervallet. Det betyder att den aktuella baslösningen kommer förbli optimal, och värdet $x_1 = 3$ är oförändrat.

Vinsten ändras alltså med $(-1) \cdot 3$, dvs. $z^*_{\text{ny}} = 16 - 3 = 13$.

b) För att kunna svara på frågan måste vi känna till intervallet inom vilket högerledet för bivillkor 2, b_2, kan ändras utan att baslösningen ändras.

- Intervallet hittar vi genom att räkna på $x_B = B^{-1}b \geq 0$, och således behöver vi först bestämma basmatrisen B och dess invers B^{-1}.
- Problemet har 2 bivillkor, alltså behövs 2 basvariabler. Från utskriften ser vi att $x_1 > 0$ och $x_3 > 0$, dvs. dessa är våra basvariabler. Vi får

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

och kan nu räkna fram intervallet för b_2.

$$x_B \; = \; B^{-1}b \; = \; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ b_2 \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 + b_2 \\ 4 - b_2 \end{pmatrix} \; \geq \; 0$$

- Vi får intervallet $-4 \leq b_2 \leq 4$.

Att öka högerledet för b_2 från 2 till 5 är alltså en ändring utanför intervallet. Vi kan öka med $(4 - 2) = 2$ steg inom intervallet, skuggpriset är 2 (inom intervallet), vilket ger följande analys.

- Worst case: ökning inom intervallet, $2 \cdot 2 = 4$.
- Best case: ökning hela vägen med samma skuggpris, $3 \cdot 2 = 6$.

Vinsten ökar alltså inom intervallet $[\,4,\, 6\,]$, dvs. $z_{\text{ny}} \in [\,20,\, 22\,]$.

c) Ny variabel, vi kan använda formeln $\bar{c}_{\text{ny}} = c_{\text{ny}} - v^T a_{\text{ny}}$ för att räkna ut dess reducerade kostnad. För att den nya variabeln <u>inte</u> ska kunna bidra till ett bättre målfunktionsvärde måste $\bar{c}_{\text{ny}} \leq 0$ då vi har ett maximeringsproblem.

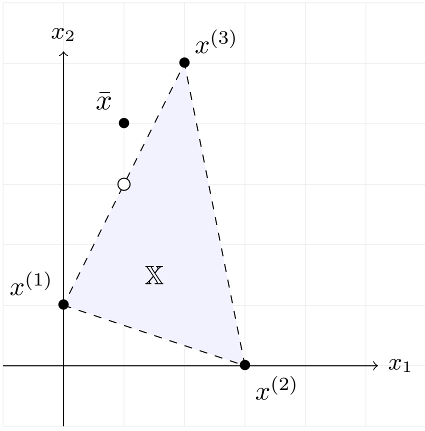
Problemet är att vi inte vet exakt vad alla koefficienter i vektorn a_{ny} ska vara.

$$\begin{aligned} \bar{c}_{\text{ny}} \; = \; c_{\text{ny}} - v^T a_{\text{ny}} \; &= \; 2 \; - \; (3, 2) \cdot (-1, \alpha)^T \\ &= \; 2 \; - \; (\; 2\alpha - 3 \;) \; = \; 5 - 2\alpha \; \leq \; 0. \end{aligned}$$

Kravet blir således att $\alpha \geq 2.5$ för att undvika en ny optimallösning.

Uppgift 4.

a) Illustrera problemet grafiskt.



$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \geq 0$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \notin \mathbb{X}$$

b) Motsvarande fas 1–problem på standardform och med artificiella variabler.

$$\begin{array}{llllllllll}
\min & w = & & & & a_1 + a_2 + a_3 & & & & \\
\text{då} & 0 \cdot \lambda_1 & + 3 \cdot \lambda_2 & + 2 \cdot \lambda_3 & + a_1 & & & = & 1 & (1) \\
& 1 \cdot \lambda_1 & + 0 \cdot \lambda_2 & + 5 \cdot \lambda_3 & & + a_2 & & = & 4 & (2) \\
& \lambda_1 + & \lambda_2 + & \lambda_3 & & & + a_3 & = & 1 & (3) \\
& \lambda_1 , & \lambda_2 , & \lambda_3 , & a_1 , & a_2 , & a_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

c) Börja med att uttrycka målfunktionen $w = a_1 + a_2 + a_3$ som en funktion av endast icke-basvariabler. Vi har att $a_1 = 1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3$, $a_2 = 4 - \lambda_1 - 5\lambda_3$ och $a_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$, vilket ger $w = 6 - 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 8\lambda_3$.

bas	w	λ_1	λ_2	λ_3	a_1	a_2	a_3	$\bar{b}$		
w	1	2	4	8	0	0	0	6	(0)	
a_1	0	0	3	$\boxed{2}$	1	0	0	1	(1)	ink: λ_3
a_2	0	1	0	5	0	1	0	4	(2)	utg: a_1
a_3	0	1	1	1	0	0	1	1	(3)	
w	1	2	−8	0	−4	0	0	2	(0)	
λ_3	0	0	1.5	1	0.5	0	0	0.5	(1)	ink: λ_1
a_2	0	1	−7.5	0	−2.5	1	0	1.5	(2)	utg: a_3
a_3	0	$\boxed{1}$	−0.5	0	−0.5	0	1	0.5	(3)	
w	1	0	−7	0	−3	0	−2	1	(0)	optimum!
λ_3	0	0	1.5	1	0.5	0	0	0.5	(1)	$w^* = 1 > 0$
a_2	0	0	−7	0	−2	1	−1	1	(2)	
λ_1	0	1	−0.5	0	−0.5	0	1	0.5	(3)	$\lambda^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$

d) Då optimallösningen till fas 1–problemet har ett målfunktionsvärde som är strikt positivt, $w^* = 1$, betyder det att ingen tillåten lösning finns, vilket här svarar mot att punkten $\bar{x}$ inte tillhör det tillåtna området.

Den lösning man får ifrån fas 1–problemet ger oss däremot den punkt i det tillåtna området som i någon mening ligger så nära punkten $\bar{x}$ som möjligt.

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi kan se i figuren ovan att det verkar stämma.

Uppgift 5.

a) Med den givna parametriseringen får vi att

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-3)^2 + 2(t-3)(\tfrac{1}{2}t) + 4(\tfrac{1}{2}t)^2 = 3t^2 - 9t \\ f'(t) &= 6t - 9 \quad [= 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = 1.5\ ] \end{aligned}$$

Börja med att bekräfta att intervallets ändpunkter ger oss olika tecken på derivatan.

$$f'(0) = -9 < 0, \quad f'(4) = 6 \cdot 4 - 9 = 24 - 9 > 0$$

Vi ser att derivatan byter tecken någonstans mellan 0 och 4. Med en tabell enligt boken får man:

k	α_k	m_k	β_k	$f'(m_k) = 6 \cdot m_k - 9$	$\beta_k - \alpha_k$
0	0	2	4	$6 \cdot 2 - 9 = 3 > 0$	4
1	0	1	2	$6 \cdot 1 - 9 = -3 < 0$	2
2	1	1.5	2	$6 \cdot 1.5 - 9 = 0$	1

Vi hittar ett optimalt steg $t^* = 1.5$ efter två intervallhalveringar!

b) Avgör om punkten $\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a, b)^T$ är en KKT-punkt algebraiskt. Börja med att kontrollera tillåtenhet och undersök vilka bivillkor som är aktiva i punkten $\bar{x}$.

Bivillkoren som svarar mot teckenkraven för $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$ är uppfyllda men inte aktiva eftersom $\bar{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a > 0$ och $\bar{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}b > 0$ (ty a och b är positiva).

Återstår att undersöka första bivillkoret. Låt $g_1(x)$ vara vänsterledet,

$$g_1(x) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}, \quad \nabla g_1(x) = 2 \left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{x_2}{b^2} \right)^T,$$

vilket ger att $g_1(\bar{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \leq 1$, alltså aktivt, och $\nabla g_1(\bar{x}) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right)^T$.

Beräkna $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ och $\nabla f(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ och undersök dual tillåtenhet.

$$\nabla f(\bar{x}) = v_1 \cdot \nabla g_1(\bar{x}) : \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = v_1 \cdot \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \tfrac{1}{2}ab > 0 \quad \text{ok!}$$

Teckenkravet $v_1 \geq 0$ är uppfyllt. Alla krav är uppfyllda, alltså är $\bar{x}$ en KKT-punkt.

c) För att avgöra om en funktion är konvex studerar vi egenvärdena för motsvarande Hessian.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2ax_1 + cx_2 \\ cx_1 + 2bx_2 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{pmatrix}$$

Vi får att

$$(2a - \lambda)(2b - \lambda) - c^2 = \lambda^2 - 2\lambda(a+b) + 4ab - c^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = (a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + c^2}$$

För att funktionen ska vara konvex måste båda dess egenvärden vara ≥ 0, och vi undersöker därför det minsta av de två egenvärdena.

$$\lambda = (a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + c^2} \geq 0 \quad \Rightarrow$$
$$(a+b) \geq \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + c^2} = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$$

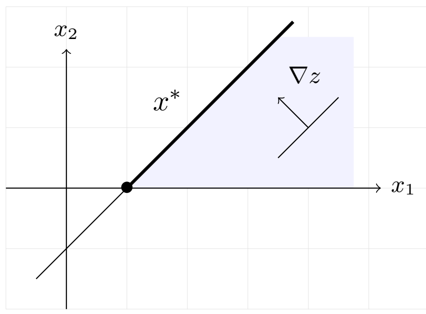
Notera att uttrycket under roten är positivt för alla värden på a, b och c, vilket ger kravet att $a + b \geq 0$. Kvadrera nu båda sidor om olikheten.

$$(a+b)^2 \geq (a+b)^2 - 4ab + c^2 \quad \Rightarrow \quad 4ab \geq c^2$$

För att detta ska kunna vara sant måste antingen både a och b vara positiva eller så är båda negativa. Men om båda vore negativa bryter man mot kravet ovan, att $a + b \geq 0$. Alltså, $f(x)$ är konvex då $4ab \geq c^2$ och $a, b \geq 0$.

d) Påståendet är <u>falskt</u>.

Det kan till exempel se ut som i bilden till höger, där endast en optimal baslösning existerar trots att problemet har oändligt många alternativa optimallösningar.



e) Påståendet är <u>falskt</u>. Att öka högerledet i ett $\geq$-villkor innebär en restriktion (det tillåtna området blir mindre), och då kan det optimala målfunktionsvärdet aldrig bli bättre. Notera att vi har ett maximeringsproblem, vilket betyder att $z^*_{\text{ny}} \leq z^*$ måste gälla vid en restriktion.

Illustration av problemet i deluppgift **b)**.

Optimeringsproblemet är att maximera arean A av en rektangel begränsad av de givna bivillkoren.

Det tillåtna området svarar mot punkter i första kvadranten som begränsas av en ellipsoid med axlar a och b.

Punkten $\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a, b)^T$ är optimal.