Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	20:e augusti 2019
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3–5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh
Jourhavande lärare:	Nils-Hassan Quttineh 013-28 21 85

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Här följer tre fristående modelleringsuppgifter.

a) Först ut är det klassiska dietproblemet, som går ut på att bestämma hur mycket man bör äta av olika livsmedel för att uppnå en balanserad kost. Målet är att minimera sina kostnader samtidigt som man får i sig tillräckligt mycket (eller lite) av olika näringsämnen. Tabell 1 ger de livsmedel som finns att välja bland, kostnad, mängden kalorier och deras näringsinnehåll (angivet per 100 gram).

Tabell 1: Livsmedel och deras respektive kalorier, näringsinnehåll och kostnad

Livsmedel	Kalorier (kcal/100g)	Fett (per 100g)	Kolhydrater (per 100g)	Protein (per 100g)	Kostnad (kr/100g)
Bröd	90	1.0	15.0	4.0	2.0
Mjölk	120	5.0	11.7	8.0	3.5
Ost	106	9.0	0.4	7.0	8.0
Potatis	97	0.1	22.6	1.3	1.5
Fisk	130	7.0	0.0	8.0	11.0

De dagliga rekommendationerna är att få i sig som minst 90 gram fett, 250 gram kolhydrater samt 2200 kalorier, och som mest 120 gram protein. Dieten måste även innehålla minst 100 gram fisk och som mest 500 gram mjölk.

Formulera dietproblemet som ett linjärt optimeringsproblem. **(2p)**

b) Betrakta ett generellt optimeringsproblem med målfunktion $f(x)$ och bivillkor $Ax = b$, $x \geq 0$. Antag att målfunktionen är linjär förutom termen "$+ |x_1|$". Variabel x_1 begränsas av $a \leq x_1 \leq b$, där $a < 0$ och $b > 0$ är givna parametrar.

Frågan är om det går att modellera problemet som ett linjärt problem? Ge ett svar för respektive fall:

1. $f(x)$ ska minimeras.
2. $f(x)$ ska maximeras.

Om det är möjligt, ge modellen! Om det inte går, motivera varför! **(1p)**

c) Antag att a, b och R är givna parametrar, där $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2}$ och $R > 0$.

Omformulera följande tillåtna område, som just nu beskrivs med hjälp av polära koordinater, till bivillkor i x_1 och x_2.

$$\mathbb{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ a \leq \theta \leq b,\ 0 \leq r \leq R \right\}$$ **(1p)**

Uppgift 2.

Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 & (1) \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 6 & (2) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 & (3) \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (4) \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

där c_1 och c_2 är positiva parametrar.

a) Skriv ned problemet på standardform. **(1p)**

b) Betrakta följande åtta punkter:

A: $(0,\ 0)^T$, B: $(2,\ 0)^T$, C: $(6,\ 0)^T$, D: $(6,\ 2)^T$,
E: $(2,\ 4)^T$, F: $(0,\ 5)^T$, G: $(-2,\ 6)^T$, H: $(4,\ 6)^T$.

Fundera på följande två frågor.

- Vilken eller vilka av dessa punkter svarar mot otillåtna baslösningar till det givna problemet?
- Vilken eller vilka av dessa punkter svarar mot tillåtna baslösningar till det givna problemet?

Svara på frågorna genom att ange punkternas namn.

(Exempelvis: A, B och C är otillåtna, E och G är tillåtna.) **(2p)**

c) Antag att punkten $(4, 3)^T$ är optimal. Vad ställer det för krav på relationen mellan värdena på c_1 och c_2? **(1p)**

Uppgift 3.

Studera följande linjära problem. Modellen och lösningen till detta LP-problem finns att skåda i utskriften nedan. Dessvärre har viss information gått förlorad, vilket markeras med symbolen "?" i utskriften. Använd den tillgängliga informationen för att svara på följande frågor. Kända formler kan behövas användas i vissa fall, för att återskapa den information som gått förlorad, men uppgifterna ska inte lösas genom att räkna simplexmetoden. Motivera tydligt dina svar.

a) Vilken är den starkaste slutsats man kan dra om värdet på z^* ifall målfunktionskoefficienten för x_1 minskas till 4? **(1p)**

b) Vilken är den starkaste slutsats man kan dra om värdet på z^* ifall högerledet i det andra bivillkoret ökas från 2 till 5? **(2p)**

c) Antag att en ny variabel x_5 med målfunktionskoefficient $c_5 = 2$ och bivillkorskoefficienter $a_5 = (-1, \alpha)^T$ läggs till i problemet. För vilka värden på α kan man direkt säga att den nya variabeln inte kommer att bidra till ett bättre målfunktionsvärde? **(1p)**

```
#----------------------------------------------------------------------

var x{1..4} >= 0;

maximize z:     5*x[1] + 3*x[2] + 1*x[3] + 6*x[4];

subject to
biv1:           1*x[1] + 2*x[2] + 1*x[3] + 1*x[4]  <=   4;
biv2:           1*x[1] + 1*x[2] - 1*x[3] + 3*x[4]  <=   2;


#----------------------------------------------------------------------

: _objname     _obj   :=
1    z          16
;


: _varname     _var     _var.rc       _var.down _var.current _var.up    :=
1   x1          3         ?             3.5         5         1e+20
2   x2          0         ?           -1e+20        3             8
3   x3          1         ?              -5         1             4
4   x4          0         ?           -1e+20        6             9
;


: _conname   _con.slack _con.dual     _con.down _con.current _con.up    :=
1   biv1          0        3              ?         4             ?
2   biv2          0        2              ?         2             ?
;
```

Uppgift 4.

Den här uppgiften handlar om hur man kan representera ett tillåtet område, som en konvexkombination av områdets extrempunkter, och hur man avgör om en given punkt tillhör detta område eller inte.

Antag att vi har ett LP-problem med ett begränsat tillåtet område $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, och att detta område har p st hörnpunkter (extrempunkter) vilka betecknas $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}$.

Det tillåtna området kan definieras med hjälp av dessa extrempunkter, närmare bestämt som "mängden av alla punkter x som kan skrivas som en konvexkombination av punkterna $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}$":

$$\mathbb{X} \;=\; \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;:\; x \;=\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^{(i)},\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\; \lambda_i \geq 0,\; i = 1, \ldots, p \right\}.$$

Alla deluppgifter utgår från de givna extrempunkterna $x^{(1)} = (0,1)^T$, $x^{(2)} = (3,0)^T$, $x^{(3)} = (2,5)^T$, samt punkten $\bar{x} = (1,4)^T$. Här är alltså $n = 2$ och $p = 3$.

a) För de givna extrempunkterna, illustrera det tillåtna området $\mathbb{X}$ med hjälp av en figur i $\mathbb{R}^2$. Markera tydligt hörnpunkterna $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, samt punkten $\bar{x}$. **(1p)**

b) En punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tillhör det tillåtna området $\mathbb{X}$ om det finns $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sådana att

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^{(i)} & = & \bar{x} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i & = & 1 \\ \lambda_i & \geq & 0, \quad i = 1, \ldots, p. \end{array} \right.$$

Det går alltså att undersöka om punkten $\bar{x}$ tillhör det tillåtna området genom att lösa ett fas 1–problem baserat på ekvationssystemet $(*)$. Inför artificiella variabler och teckna detta LP-problem för de givna punkterna. **(1p)**

c) Lös fas 1–problemet och verifiera det som figuren i deluppgift **a)** visar. **(1p)**

d) Tag optimallösningen från deluppgift **c)** och översätt den till en punkt i $\mathbb{R}^2$. **(1p)**

Uppgift 5.

Lite gott och blandat, uppgifterna är helt fristående. Motivera svaren noggrant!

a) Betrakta den konvexa funktionen $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$.
Låt $x_1(t) = t - 3$ och $x_2(t) = \frac{1}{2}t$ där $t \in [0, 4]$. Använd intervallhalvering för att bestämma ett intervall på högst 0.1 enheter inom vilket minpunkten återfinns för denna parametrisering av x_1 och x_2. **(1p)**

b) Betrakta följande problem, där $a > 0$ och $b > 0$ är givna konstanter.

$$\begin{array}{lrl} \max & f = & x_1x_2 \\ \text{då} & & \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \\ & & x_1 \,,\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

Undersök om $\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ är en KKT-punkt. **(1p)**

c) Betrakta funktionen $f(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2$, där a, b och c är reella parametrar. Avgör för vilka värden på a, b och c som $f(x)$ är en konvex funktion. (Obs, inte strikt konvex.) **(1p)**

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt.

d) Om ett LP-problem har alternativa optimallösningar så existerar det åtminstone två optimala baslösningar. **(1p)**

e) Låt z^* vara det optimala målfunktionsvärdet till följande LP-problem.

$$\begin{array}{llrcl} \max & z = & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 & & \\ \text{då} & & x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 & \geq & 6 \quad (1) \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 9 \quad (2) \\ & & x_1 \,,\; x_2 \,,\; x_3 \,,\; x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Om högerledet i bivillkor (1) ändras till 7 så blir $z^*_{\text{ny}} = z^* + 2$. **(1p)**
