Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 29:e maj 2019

Uppgift 1.

a) Variabeldefinitioner:

x_{ijt} = antal kg av godissort i som används i blandningen för produkt j som tillverkas under vecka t

q_{jkt} = antal kg av produkt j som säljs till kund k under vecka t

y_{it} = antal kg av godissort i som köps in under vecka t

L^R_{it} = antal kg av godissort i som finns i lager i slutet av vecka t

L^P_{jt} = antal kg av produkt j som finns i lager i slutet av vecka t

b) Bivillkor (3) och (4) är så kallade *lagerbalansvillkor.*

- Bivillkor (3) är lagerbalans för råvarorna (godissorterna), och till det ingående lagret läggs den mängd som köps in (y_{it}) medan den totala mängden av godissort i som används under vecka t dras bort.
- Villkor (4) är lagerbalans för produkterna (godismixarna), och till det ingående lagret läggs den mängd som blandas till medan den totala mängden av produkt j som säljs (q_{jkt}) under vecka t dras bort.

c) Det saknas ett bivillkor som begränsar utnyttjandet av maskinen som blandar ihop godissorterna.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_{ij} x_{ijt} \;\leq\; 60 \cdot H_t, \quad t \in T$$

d) Denna modifiering kräver följande steg:

- Inför en ny variabel.

  Y_{it} = antal kilo av godissort i som köps in under vecka t till det högre inköpspriset o_{it}

- Utöka målfunktionen med en extra term: $-\sum_{i \in I} \sum_{t \in T} o_{it} Y_{it}$
- Modifiera lagerbalansvillkoret (3) enligt följande.

$$L^R_{i,t-1} + y_{it} + \underline{Y_{it}} - \sum_{j \in J} x_{ijt} \;=\; L^R_{it}, \qquad i \in I,\ t \in T$$

- Det krävs även bivillkor som begränsar y_{it}, samt teckenkrav för Y_{it}.

$$\begin{aligned} y_{it} &\leq s_{it}, \qquad i \in I,\ t \in T \\ Y_{it} &\geq 0, \qquad i \in I,\ t \in T \end{aligned}$$

Nu har vi utökat modellen till att hantera de nya förutsättningarna.

Uppgift 2.

Simplexmetoden.

a) För att den givna startbasen, $\{s_1, s_2, s_3\}$, ska fungera måste $g = 1$ och $b \geq 0$.

b) Den givna startbasen är tillåten men inte optimal:

- tillåten då $g = 1$ och $b \geq 0$.
- eftersom reducerad kostnad för x_3 är negativ (-3) så är inte den givna startbasen optimal, oavsett värdena för d, f och k.

c) Den givna startbasen är tillåten, x_4 blir inkommande och s_1 blir utgående:

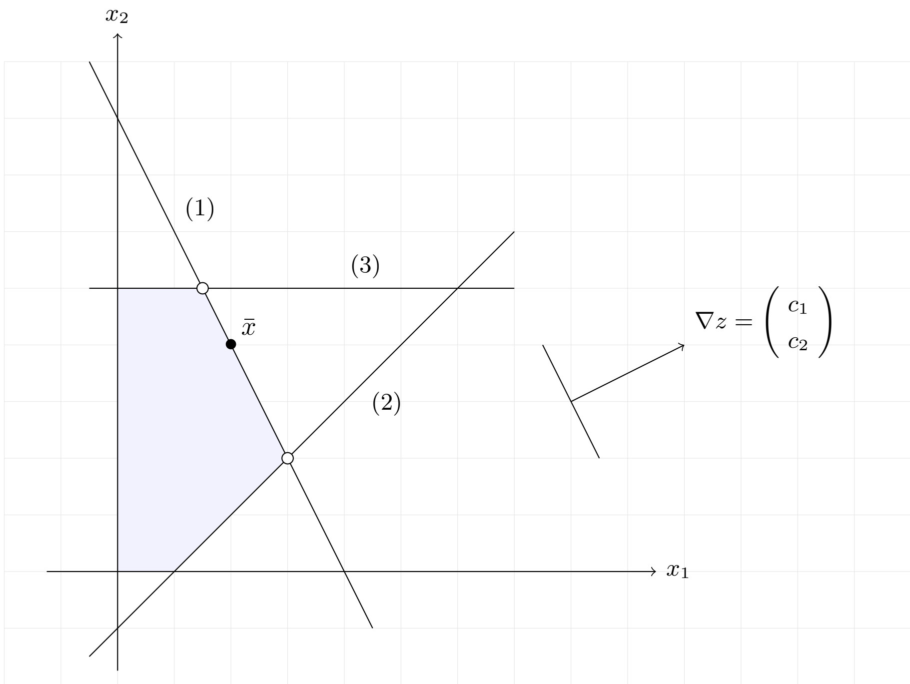
- tillåten då $g = 1$ och $b \geq 0$.
- variabel x_4 inkommande då $k > 3$, samt att $k > d$ och $k > f$.
- variabel s_1 utgående då $\frac{4}{e} < \frac{3}{2}$, dvs. $e > \frac{8}{3}$.

d) Den givna startbasen är tillåten, men problemet har obegränsad lösning:

- tillåten då $g = 1$ och $b \geq 0$.
- variabel x_1 inkommande då $d > 3$, samt att $d > f$ och $d > k$.
- parameter $a \leq 0$ för att få en obegränsad lösning.

Uppgift 3.

Rita upp det tillåtna området. (Grafisk motivering)



Punkten $\bar{x}$ är en optimallösning till problemet endast om hela linjesegmentet mellan de två extrempunkterna är optimalt. Detta händer då målfunktionsgradienten är parallell med bivillkorsgradienten för bivillkor (1), dvs. när $c_1 = 2c_2$.

a) Teckna det duala problemet och samtliga komplemetvillkor.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\min & w = & 8v_1 & + & v_2 & + & 5v_3 & & & \\
\text{då} & & 2v_1 & + & v_2 & & & \geq & c_1 & (1) \\
 & & v_1 & - & v_2 & + & v_3 & \geq & c_2 & (2) \\
 & & v_1 & , & v_2 & , & v_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Komplementvillkoren:

$$
\begin{aligned}
(2x_1 + x_2 - 8) \cdot v_1 &= 0 & \qquad (2v_1 + v_2 - c_1) \cdot x_1 &= 0 \\
(x_1 - x_2 - 1) \cdot v_2 &= 0 & \qquad (v_1 - v_2 + v_3 - c_2) \cdot x_2 &= 0 \\
(x_2 - 5) \cdot v_3 &= 0 & &
\end{aligned}
$$

b) Punkten $\bar{x}$ uppfyller optimalitetsvillkoren för LP-problem om

1. punkten är primalt tillåten,
2. uppfyller komplementvillkoren,
3. motsvarande duallösning är dualt tillåten.

1. Primala tillåtenhet

$$\begin{array}{lrrcrl}
(1): & 2\cdot(2)+1\cdot(4) & = & 8 & \leq & 8 \text{ ok!} \\
(2): & 1\cdot(2)-1\cdot(4) & = & -2 & < & 1 \text{ ok!} \\
(3): & (4) & = & 4 & < & 5 \text{ ok!}
\end{array}$$

2. Komplementvillkoren

$$\begin{array}{ccl}
\text{Aktivt} & \Rightarrow & v_1 = \ ? \\
\text{Inte aktivt} & \Rightarrow & v_2 = 0 \\
\text{Inte aktivt} & \Rightarrow & v_3 = 0
\end{array}$$

Utnyttja nu att $x_1 \neq 0$ och $x_2 \neq 0$ i punkten $\bar{x}$, och att $v_2 = v_3 = 0$.

$$\left.\begin{array}{rcll}
(2v_1 + v_2 - c_1)\cdot x_1 & = & 0, & \Rightarrow \ 2v_1 = c_1 \\
(v_1 - v_2 + v_3 - c_2)\cdot x_2 & = & 0, & \Rightarrow \ v_1 = c_2
\end{array}\right\}$$

Vi får att $c_2 = v_1 \geq 0$ och att $c_1 = 2v_1 \geq 0$, samt att $c_1 = 2c_2$.

c) Inre punkt $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i,\ i = 1,\ldots,m, \quad x_j > 0,\ j = 1,\ldots,n.$

$$\begin{array}{llrcll}
(P) & \max\ z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & & \\
& \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i\ , & i = 1,\ldots,m \\
& & x_j & \geq & 0\ , & j = 1,\ldots,n
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcll}
(D) & \min\ w = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i v_i & & & & \\
& \text{då} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i & \geq & c_j\ , & j = 1,\ldots,n \\
& & v_i & \geq & 0\ , & i = 1,\ldots,m
\end{array}$$

Komplementvillkoren:

$$\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i}_{\neq 0}\right)\cdot v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad v_i = 0, \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_i - c_j\right)\cdot \underbrace{x_j}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_i, \qquad i = 1,\ldots,m$$

Eftersom $v_i = 0,\ i = 1,\ldots,m$ följer att $c_j = 0,\ j = 1,\ldots,n$. För att en inre punkt ska kunna vara optimal så måste alltså målfunktionen vara konstant, dvs. att samtliga tillåtna punkter är optimala.

Uppgift 4.

Känslighetsanalys.

a) Öka högerled (syavdelningen) med 60 steg, från 720 till 780. Intervallet är $[682.5, 728]$, alltså en ändring utanför intervallet. Vi kan öka med $(728 - 720) = 8$ steg inom intervallet, skuggpriset är 5 (inom intervallet), vilket ger följande analys.

- Worst case: ökning inom intervallet, $8 \cdot 5 = 40$.
- Best case: ökning hela vägen med samma skuggpris, $60 \cdot 5 = 300$.

Vinsten ökar alltså inom intervallet $[\,40,\ 300\,]$, dvs. $z_{\text{ny}} \in [\,3640,\ 3900\,]$.

b) Öka målfunktionskoefficient (för HB) med 4 steg, från 30 till 34. Intervallet är $[30, 32]$, alltså en ändring utanför intervallet. Den aktuella baslösningen är dock tillåten, även om ändringen går utanför. Det tillverkas 20 stycken handbollar, vilket ger att:

- Worst case: ökning hela vägen, $4 \cdot 20 = 80$.
- Best case: går inte att säga hur mycket bättre det blir i ny baslösning.

Vinsten ökar alltså som minst med 80, dvs. $z_{\text{ny}} \geq 3680$.

c) Basvariabler $x_B = \{x_{\text{HB}},\ x_{\text{BB}},\ s_3\}$ och icke-basvariabler $x_N = \{x_{\text{FB}},\ s_1,\ s_2\}$.

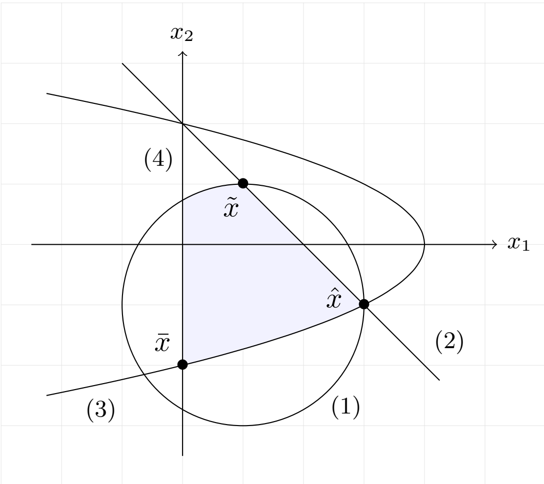
$$c_B^T = (30, 40, 0)^T, \quad c_N^T = (25, 0, 0)^T, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Nej, ty icke-basvariabel x_{FB} har reducerad kostnad $= 0$, vilket betyder att det finns alternativa optimallösningar.

Uppgift 5.

Illustrera problemet grafiskt och ta fram gradienter för alla bivillkor och för målfunktionen.

Målfunktionen är okänd, så $\nabla f(x) = ?$



Bivillkorsgradienter och teckenkrav:

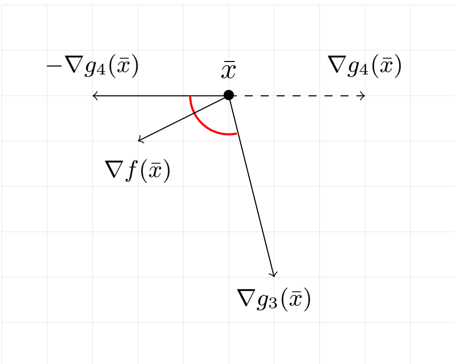
$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 + 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 \geq 0$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 \geq 0$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad v_3 \geq 0$$

$$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 \leq 0$$

a) I punkten $\bar{x} = (0, -2)^T$ ser vi att bivillkor (3) och (4) aktiva, och vi vet att målfunktionsgradienten i punkten är $\nabla f(\bar{x}) = (-2, -1)^T$. Rita ut $\nabla g_3(\bar{x})$, ty $\leq$-villkor, och $-\nabla g_4(\bar{x})$, ty $\geq$-villkor, och undersök om $\nabla f(\bar{x})$ tillhör konen.

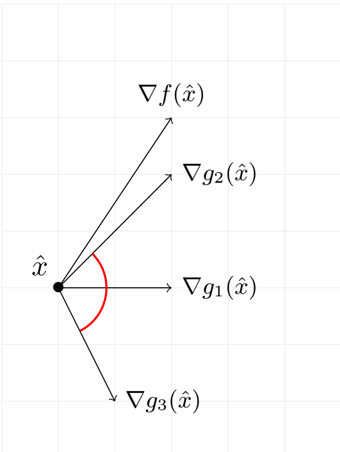


Beräkna $\nabla g_3(\bar{x})$ och $\nabla g_4(\bar{x})$:

$$\nabla g_3(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_4(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Då $\nabla f(\bar{x})$ tillhör konen som spänns upp av bivillkorsgradienterna till de aktiva bivillkoren så har vi visat att punkten $\bar{x}$ uppfyller KKT-villkoren!

b) Avgör om punkten $\hat{x} = (3, -1)^T$ är en KKT-punkt algebraiskt. Utifrån ett grafiskt resonemang är det enkelt att se vad som kommer att hända.



Vi ser att bivillkor (1), (2) och (3) är aktiva i punkten, och att motsvarande gradienter bildar en kon som målfunktionsgradienten $\nabla f(\hat{x})$ <u>inte</u> tillhör.

Återstår nu att visa detta algebraiskt.

Undersök algebraiskt vilka bivillkor som är aktiva i punkten $\hat{x} = (3, -1)^T$.

1. Primal tillåtenhet					2. Komplementaritet		
$g_1(\hat{x})$	$=$	$(3-1)^2 + (-1+1)^2 = 4 \leq 4$	ok!		Aktivt	$\Rightarrow$	$v_1 = ?$
$g_2(\hat{x})$	$=$	$3 + (-1) = 2 \leq 2$	ok!		Aktivt	$\Rightarrow$	$v_2 = ?$
$g_3(\hat{x})$	$=$	$3 + (-1)^2 = 4 \leq 4$	ok!		Aktivt	$\Rightarrow$	$v_3 = ?$
$g_4(\hat{x})$	$=$	$3 = 3 > 0$	ok!		Inte aktivt	$\Rightarrow$	$v_4 = 0$

Vi beräknar $\nabla g_1(\hat{x})$, $\nabla g_2(\hat{x})$ och $\nabla g_3(\hat{x})$, och sätter upp den duala tillåtenheten.

3. Konen: $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} 2 & = & 4v_1 + v_2 + v_3 \\ 3 & = & v_2 - 2v_3 \end{array} \right\}$$

Från andra ekvationen får vi att $v_2 = 3 + 2v_3 \geq 0$ eftersom $v_3 \geq 0$, så allting är ok så långt. Men om v_2 substitueras in i första ekvationen får vi att $2 = 3 + 4v_1 + 3v_3$, och eftersom både $v_1 \geq 0$ och $v_3 \geq 0$ är detta omöjligt. Alltså är $\hat{x}$ <u>inte</u> en KKT-punkt.

c) Vi vet att för konvexa problem så är ett lokalt optima även globalt, vilket gör att det finns som mest en KKT-punkt. Från deluppgift **a)** vet vi att $\bar{x}$ är en KKT-punkt, och eftersom punkten $\tilde{x}$ också är en KKT-punkt så kan problemet <u>inte</u> vara konvext.

d) Börja med att ta fram gradienten och Hessianen för $f(x)$, samt räkna ut vad dessa blir i punkten $x^{(0)} = (1, 0)^T$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 - 4 \\ x_1^2 + 2x_2 - 5 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad H(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Använd Newtons metod, börja i punkten $x^{(0)}$.

$$\begin{aligned} d_{NM} &= -H^{-1}(x^{(0)})\nabla f(x^{(0)}) = +\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x^{(1)} &= x^{(0)} + t \cdot d_{NM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi får att
$$\begin{aligned} f(t) &= (1)^2 \cdot (2t) + (2t)^2 - 4 \cdot (1) - 5 \cdot (2t) = 4t^2 - 8t - 4 \\ f'(t) &= 8t - 8 \quad \Rightarrow \quad t^* = 1 \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = (1, 2)^T \end{aligned}$$

Eftersom $\nabla f(x^{(1)}) = (0, 0)^T$ har vi hittat en stationär punkt efter första iterationen. För att visa att detta är ett lokalt minimum måste vi undersöka om Hessianen är positivt definit i den aktuella punkten.

$$H(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 4 > 0 \\ \Delta_2 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 4 > 0 \end{array}$$

Hessianen är alltså positivt definit, vilket betyder att $f(x)$ är strikt konvex i en omgivning till $x^{(1)}$, och eftersom $\nabla f(x^{(1)}) = 0$ måste $x^{(1)}$ vara ett lokalt minimum.