Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	29:e maj 2019
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3 – 5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh
Jourhavande lärare:	Nils-Hassan Quttineh 013-28 21 85

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Företaget MumsMix erbjuder godispåsar som innehåller blandningar av godis med olika färger och smaker. Man erbjuder sina kunder $j \in J$ olika mixar (produkter) vilka blandas ihop utifrån $i \in I$ olika godissorter (råvaror). Parametern a_{in} beskriver vilken egenskap $n \in N = \{\texttt{salt, surt, sött}\}$ varje godissort i anses ha.

Företaget har en stadig kundkrets, och för varje kund $k \in K$ finns en övre gräns d_{jkt} för hur mycket de är villiga att köpa in varje vecka $t \in T$ av respektive produkt j till priset av p_{jkt} kronor per kg. Företaget samarbetar med en grossist som erbjuder de olika godissorterna i till det förmånliga priset r_{it} kronor per kg varje vecka t.

På fabriken finns en maskin som används för att blanda ihop de olika produkterna, och för varje kilo av godissort i som ingår i mixen för produkt j tar det h_{ij} minuter för maskinen att bearbeta blandningen. Totalt finns H_t timmar maskintid tillgängligt under vecka t. Andelen av de olika egenskaperna n i de godispåsar j som MumsMix blandar ihop måste uppfylla ett krav på som minst B_{jn} procent.

Företaget håller både godissorter och färdigmixade godispåsar i lager, och en lagerkostnad på c_i^R respektive c_j^P kronor per kg uppstår för den mängd som finns i lager i slutet av varje vecka. Båda dessa lager är initialt tomma. För att hantera oförutsedda svängningar i efterfrågan vill MumsMix att det finns åtminstone m_{jt} kilo av de olika färdigmixade godispåsarna kvar i lager i slutet på varje vecka. De godissorter som lagerhålls måste förvaras i ett speciellt utrymme för att hålla sig färska, och detta utrymme klarar av maximalt M kg godis.

Företaget önskar sig en linjär optimeringsmodell som maximerar den totala nettovinsten. Den färdiga modellen finns given, men praktikanten som fick i uppgift att sätta ihop modellen missade att tydligt beskriva dess variabler och bivillkor.

a) Hur många olika variabeltyper finns det i modellen? Skriv ner *tydliga* variabeldefinitioner för dessa variabler. **(1p)**

b) Förklara vilka krav som bivillkor (3) och (4) tar hand om, och beskriv *tydligt* hur dessa bivillkor fungerar. Vad kallas denna typ av bivillkor? **(1p)**

c) Pinsamt nog saknas ett bivillkor i modellen. Ange vad som saknas och lägg till detta bivillkor! **(1p)**

d) Företaget behöver modifiera den befintliga modellen. Inköpspriset r_{it} gäller bara upp till s_{it} kilo av godissort i under vecka t, därefter ökar priset till o_{it} kr per kilo.

Beskriv tydligt om nya variabler och bivillkor införs, och om befintlig målfunktion och bivillkor modifieras. Modellen skall förbli linjär! **(1p)**

$$\max \quad z = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{t\in T} p_{jkt}q_{jkt} - \sum_{i\in I}\sum_{t\in T} r_{it}y_{it} - \sum_{i\in I}\sum_{t\in T} c_i^R L_{it}^R - \sum_{j\in J}\sum_{t\in T} c_j^P L_{jt}^P$$

då

$$\begin{aligned}
q_{jkt} &\leq d_{jkt}, & j \in J,\ k \in K,\ t \in T \quad & (1)\\
\sum_{i\in I} a_{in}x_{ijt} &\geq B_{jn}\sum_{i\in I} x_{ijt}, & j \in J,\ n \in N,\ t \in T \quad & (2)\\
L_{i,t-1}^R + y_{it} - \sum_{j\in J} x_{ijt} &= L_{it}^R, & i \in I,\ t \in T \quad & (3)\\
L_{j,t-1}^P + \sum_{i\in I} x_{ijt} - \sum_{k\in K} q_{jkt} &= L_{jt}^P, & j \in J,\ t \in T \quad & (4)\\
L_{i,0}^R &= 0, & i \in I \quad & (5)\\
L_{j,0}^P &= 0, & j \in P \quad & (6)\\
\sum_{i\in I} L_{it}^R &\leq M, & t \in T \quad & (7)\\
L_{jt}^P &\geq m_{jt}, & j \in J,\ t \in T \quad & (8)\\
x_{ijt} &\geq 0, & i \in I,\ j \in J,\ t \in T \quad & (9)\\
q_{jkt} &\geq 0, & j \in J,\ k \in K,\ t \in T \quad & (10)\\
y_{it} &\geq 0, & i \in I,\ t \in T \quad & (11)\\
L_{it}^R &\geq 0, & i \in I,\ t \in T_0 \quad & (12)\\
L_{jt}^P &\geq 0, & j \in J,\ t \in T_0 \quad & (13)
\end{aligned}$$

- Mängden T_0 innehåller vecka 0 plus alla andra veckor i mängden T.

Uppgift 2.

Utgå ifrån ett linjärt minimeringsproblem på standardform med föjande starttablå, där elementen a, b, d, e, f, g, k i tablån är okända parametrar.

bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	d	f	3	k	0	0	0	0
s_1	0	-2	-1	2	e	1	0	0	4
s_2	0	a	3	1	0	0	1	0	b
s_3	0	0	1	-1	2	0	0	g	3

Antag att man vill lösa problemet med hjälp av Simplexmetoden, där inkommande basvariabel väljs på vanligt vis (den icke-basvariabel med bäst reducerad kostnad).

För var och en av följande delfrågor, identifiera vilka av parametrarna som kan påverka ifall påståendet är sant eller ej, och svara med värden/intervall för alla de relevanta parametrarna vilket gör att påståendet är sant.

a) Det går bra att starta Simplex Fas II med den givna startbasen. **(1p)**

b) Den givna startbasen är tillåten men inte optimal. **(1p)**

c) Den givna startbasen är tillåten och variabel x_4 är inkommande, vilket ger att s_1 blir utgående basvariabel. **(1p)**

d) Den givna startbasen är tillåten, men i första pivoteringen upptäcker man att problemet har en obegränsad lösning. **(1p)**

Uppgift 3.

Betrakta följande linjära problem.

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & (1) \\
 & & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 & (2) \\
 & & & & x_2 & \leq & 5 & (3) \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Teckna det duala problemet och samtliga komplementvillkor. **(1p)**

b) Antag att punkten $\bar{x} = (2, 4)^T$ är en optimallösning till problemet.

Använd optimalitetsvillkoren för LP-problem för att bestämma vad som då måste gälla för c_1 och c_2. **(1p)**

Denna deluppgift går att lösa fristående från deluppgift **a)** och **b)**.

c) Utgå ifrån ett LP-problem på följande form.

$$
\begin{array}{llrcl}
\max & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{då} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i, & i = 1, \dots, m \\
 & x_j & \geq & 0\ , & j = 1, \dots, n
\end{array}
$$

Med hjälp av optimalitetsvillkoren, härled matematiskt vad som måste gälla för målfunktionskoefficienterna c_j för att en inre punkt (en punkt där samtliga bivillkor är uppfyllda med strikt olikhet, inklusive icke-negativitetskraven) ska kunna vara optimal. **(2p)**

Uppgift 4.

Leksakstillverkaren LEKA producerar tre olika typer av bollar: handbollar, fotbollar och basketbollar. Dessa bollar säljs för 30 kr, 25 kr samt 40 kr. Vid produktion av de olika bollarna krävs tid i tre olika avdelningar: klippning, sytid och packning. Det går åt olika lång tid i de olika avdelningarna för varje produkt, vilket fångas upp av modellens tre resursbegränsande bivillkor. Totalt har företaget 910 minuter för klippning, 720 minuter till syavdelningen och 390 minuter till att förpacka bollarna.

LEKA vill maximera sin vinst och har löst sitt produktionsplaneringsproblem med hjälp av ett optimeringsprogram. Modellen och lösningen till motsvarande LP-problem finns att skåda i utskriften på nästa sida. Använd denna information för att svara på följande frågor. Motivera tydligt dina svar.

a) Vad kan sägas om den förväntade vinsten ifall den tillgängliga tiden i syavdelningen ökar med 1 timme? **(1p)**

b) Vad kan man säga om vinsten ifall försäljningspriset på handbollar ökas till 34 kr? **(1p)**

c) Låt s_1, s_2 och s_3 beteckna slackvariablerna för respektive bivillkor.

Ange vilka variabler som är bas- respektive icke-bas i optimum, och ange vektorerna c_B^T och c_N^T samt matriserna B och N. **(1p)**

d) Är problemets optimallösning unik? **(1p)**

```
# MODELL
#------------------------------------------------------------------------

var HB >= 0;            # Antal tillverkade Handbollar
var FB >= 0;            # Antal tillverkade Fotbollar
var BB >= 0;            # Antal tillverkade Basketbollar


maximize vinst:   30*HB  + 25*FB  +  40*BB;

subject to
klippning:         8*HB  +  7*FB  +  10*BB  <=  910;
syavdelning:       6*HB  +  5*FB  +   8*BB  <=  720;
packning:          3*HB  +  4*FB  +   2*BB  <=  390;



# LÖSNING
#------------------------------------------------------------------------

: _objname       _obj   :=
1   vinst        3600
;


: _varname        _var      _var.rc      _var.down _var.current _var.up     :=
1   HB             20          0            30          30          32
2   FB              0          0        -1e+20          25          25
3   BB             75          0          37.5          40          40
;


: _conname      _con.slack _con.dual  _con.down _con.current  _con.up     :=
1  klippning          0          0         900          910         960
2  syavdelning        0          5       682.5          720         728
3  packning         180          0         210          390       1e+20
;
```

Uppgift 5.

Studera följande icke-linjära problem.

$$\begin{array}{llcccl} \max & f(x) & & & & \\ \text{då} & g_1(x) & = & (x_1-1)^2+(x_2+1)^2 & \leq 4 & (1) \\ & g_2(x) & = & x_1 + x_2 & \leq 2 & (2) \\ & g_3(x) & = & x_1 + x_2^2 & \leq 4 & (3) \\ & g_4(x) & = & x_1 & \geq 0 & (4) \end{array}$$

Målfunktionen $f(x)$ är okänd, men följande information finns att tillgå:

- I punkten $\bar{x} = (0, -2)^T$ är $\nabla f(\bar{x}) = (-2, -1)^T$.
- I punkten $\hat{x} = (3, -1)^T$ är $\nabla f(\hat{x}) = (2, 3)^T$.

Svara på följande frågor.

a) Avgör grafiskt om punkten $\bar{x} = (0, -2)^T$ uppfyller KKT-villkoren. **(1p)**

b) Avgör algebraiskt om punkten $\hat{x} = (3, -1)^T$ uppfyller KKT-villkoren. **(1p)**

c) Givet informationen att punkten $\tilde{x} = (1, 1)^T$ är en KKT-punkt, kan man med hjälp av slutsatserna från tidigare deluppgifter avgöra om problemet är konvext eller inte? Motivera! **(1p)**

Följande deluppgift är helt fristående.

d) Betrakta problemet att minimera funktionen $f(x) = x_1^2 x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 5x_2$. Utgå från startpunkten $x^{(0)} = (1, 0)^T$ och utför en iteration med Newtons modifierade metod, och visa att den erhållna punkten är ett lokalt minimum. **(2p)**
