Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 30:e oktober 2018

Uppgift 1.

a) Variabeldefinitioner:

x_{it} = antal enheter av produkt i som tillverkas under vecka t

L_{it} = antal enheter av produkt i som finns i lager i slutet av vecka t

Modell:

$$
\begin{array}{llrcll}
\min & z & = & \displaystyle\sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} c^{\mathrm{P}}_{it} x_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} c^{\mathrm{L}}_{it} L_{it} & & \\
\text{då} & & \displaystyle\sum_{i \in I} x_{it} & \leq & M_t & t = 1, \ldots, T \\
& & L_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} & = & L_{it} & i \in I,\ t = 1, \ldots, T \\
& & L_{i,0} & = & L^0_i & i \in I \\
& & \displaystyle\sum_{i \in I} L_{i,T} & \geq & K & \\
& & x_{it} & \geq & 0 & i \in I,\ t = 1, \ldots, T \\
& & L_{it} & \geq & 0 & i \in I,\ t = 0, \ldots, T
\end{array}
$$

b) Utöka modellen med följande bivillkor.

$$\sum_{i \in I_1} x_{it} \geq 2 \sum_{i \in I_2} x_{it}, \qquad t = 1, \ldots, T$$

c) Denna utökning kräver följande steg:

- Inför en ny variabel.
  B_{it} = antal enheter av produkt i som är backlog i slutet av vecka t
- Ersätt det ursprungliga lagerbalansvillkoret med följande bivillkor. Den nya variabeln kan tolkas som att man "lånar från framtida lager".

$$L_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} + B_{it} = L_{it} + B_{i,t-1}, \qquad i \in I,\ t = 1, \ldots, T$$

- Det krävs även bivillkor som definierar start- och sluttillstånd för B_{it}.

$$B_{i,0} = 0, \qquad t = 1, \ldots, T$$

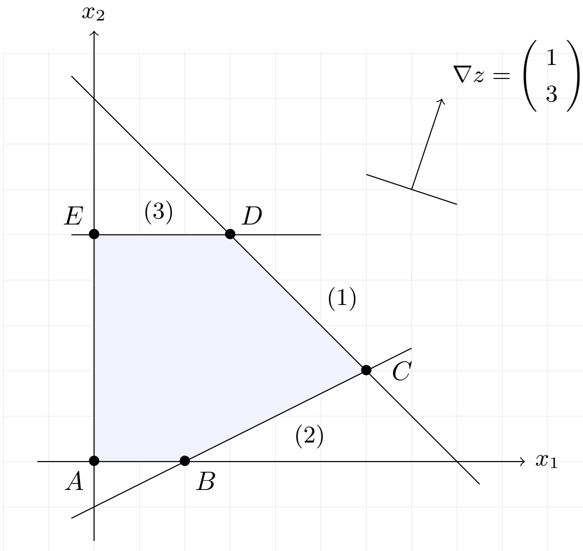
$$B_{i,T} = 0, \qquad t = 1, \ldots, T$$

- Slutligen, utöka målfunktionen med en extra term.

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} c^{\mathrm{B}}_{it} B_{it}$$

Uppgift 2.

a) Rita upp det tillåtna området.



Optimallösningen hamnar i extrempunkt D, dvs. $x^* = (3,5)^T$ och det optimala målfunktionsvärdet är $z^* = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 18$.

b) Vi utökar modellen med slackvariabler (skriv om problemet på standardform) och löser med Simplexmetoden.

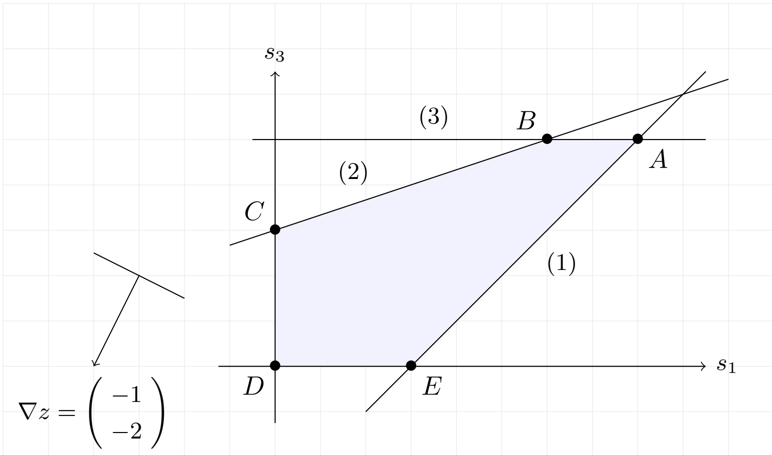
bas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$		
z	1	−1	−3	0	0	0	0	(0)	
s_1	0	1	1	1	0	0	8	(1)	ink: x_2
s_2	0	1	−2	0	1	0	2	(2)	utg: s_3
s_3	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	5	(3)	
z	1	−1	0	0	0	3	15	(0)	
s_1	0	$\boxed{1}$	0	1	0	−1	3	(1)	ink: x_1
s_2	0	1	0	0	1	2	12	(2)	utg: s_1
x_2	0	0	1	0	0	1	5	(3)	
z	1	0	0	1	0	2	18	(0)	optimum:
x_1	0	1	0	1	0	−1	3	(1)	$x^* = (3,5)^{\mathrm{T}}$
s_2	0	0	0	−1	1	3	9	(2)	$z^* = 18$
x_2	0	0	1	0	0	1	5	(3)	

Optimallösningen är $x^* = (3,5)^T$ och det optimala målfunktionsvärdet är $z^* = 18$.

c) Enligt optimaltablån i deluppgift **b)** är s_1 och s_3 icke-basvariabler. För bivillkor (1) är ursprunglig variabel x_1 "slackvariabel", och motsvarande slackvariabler i bivillkor (2) och (3) är s_2 respektive x_2. Tag alltså bort dessa variabler (x_1, s_2, x_2) och teckna motsvarande LP-problem.

$$\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = 18 & -s_1 & - & 2s_3 & & & & & \\
\text{då} & & s_1 & - & s_3 & \leq & 3 & & (1) & [\ x_1\ ] \\
& & -s_1 & + & 3s_3 & \leq & 9 & & (2) & [\ s_2\ ] \\
& & & & s_3 & \leq & 5 & & (3) & [\ x_2\ ] \\
& & s_1 & , & s_3 & \geq & 0 & & &
\end{array}$$

- Illustrera detta nya LP-problem och lös det grafiskt.



Optimallösningen hamnar i origo (vilket svarar mot extrempunkt D) och det optimala målfunktionsvärdet är $z^* = 18 - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 18$.

- För att bestämma hur extrempunkterna i figuren ovan hänger ihop med extrempunkterna ifrån uppgift **a)** gäller det att (som vanligt) avgöra vilka variabler som är bas respektive icke-bas i varje punkt.

Punkt	Aktiva bivillkor	x_N	x_B	Punkt i (x_1, x_2)-rummet
A	(1) och (3)	$\{x_1, x_2\}$	$\{s_1, s_2, s_3\}$	$(0, 0)^T$
B	(2) och (3)	$\{s_2, x_2\}$	$\{x_1, s_1, s_3\}$	$(2, 0)^T$
C	(2)	$\{s_1, s_2\}$	$\{x_1, x_2, s_3\}$	$(6, 2)^T$
D	–	$\{s_1, s_3\}$	$\{x_1, x_2, s_2\}$	$(3, 5)^T$
E	(1)	$\{x_1, s_3\}$	$\{x_2, s_1, s_2\}$	$(0, 5)^T$

[Det vi har gjort är alltså att betrakta det tillåtna området utifrån den aktuella baslösningen. Vi tolkar denna punkt som origo och de olika koordinatriktningarna svarar nu rakt av mot möjliga inkommande basvariabler.

Notera att målfunktionskoefficienterna i detta problem svarar mot de reducerade kostnaderna i simplextablån. Här har vi ett maximeringsproblem, och att då ha negativa målfunktionskoefficeinter (reducerade kostnader) svarar mot att origo (den aktuella baslösningen) är optimal.]

Uppgift 3.

a) För att bestämma allt som är obekant nystar vi upp problemet. Ett bra sätt att komma igång är att beskriva det primala problemet (P) på matrisform.

$$c_P^T = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_P = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_P = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

Det duala problemets bivillkorskoefficienter beskrivs av A_P^T, vilket direkt ger oss att parameter $a = -5$. Vidare är målfunktionsvektorn från det primala problemet densamma som det duala problemets högerled, vilket ger sambandet $b = c$ mellan de okända parametrarna.

För att $\bar{x}$ och $\bar{v}$ ska vara optimala i respektive problem måste följande vara sant:

- $\bar{x}$ tillåten i (P) och $\bar{v}$ tillåten i (D).
- $\bar{x}$ och $\bar{v}$ uppfyller komplementvillkoren.
- Stark dualitet gäller, dvs. $z(\bar{x}) = w(\bar{v})$.

Betrakta målfunktion, primal tillåtenhet och komplementvillkoren för $\bar{x} = (-1, 8, 0)^T$.

$$\begin{array}{llcrclll}
z \; = & 10\cdot(-1) - 1\cdot(8) + 5\cdot(0) = -18 & & & & & & \\
\text{biv.1:} & 2\cdot(-1) - 5\cdot(8) & = & -42 & < & 3 & \text{ok!} & \Rightarrow \; v_1 = 0 \text{ p.g.a. kompl. ok!} \\
\text{biv.2:} & 1\cdot(-1) + 1\cdot(8) + 2\cdot(0) & = & 7 & \geq & b & v_2 \neq 0 & \Rightarrow \; b = 7 \text{ p.g.a. kompl.} \\
\text{biv.3:} & 1\cdot(-1) \qquad\qquad + 1\cdot(0) & = & -1 & \leq & -1 & \text{ok!} & \\
& -1 \leq 0, \quad 8 \geq 0, \quad 0 \;\; R1 \;\; 0 & & & & & \text{ok!} &
\end{array}$$

Och sen samma sak för $\bar{v} = (0, -1, 11)^T$ i det duala problemet.

$$\begin{array}{lrcrclll}
w \; = & 3\cdot(0) + c\cdot(-1) - 1\cdot(11) & = & -11 - c & & & & \\
\text{biv.1:} & 2\cdot(0) + 1\cdot(-1) + 1\cdot(11) & = & 10 & \leq & 10 & \text{ok!} & \\
\text{biv.2:} & -5\cdot(0) + 1\cdot(-1) \qquad\qquad & = & -1 & \geq & -1 & \text{ok!} & \\
\text{biv.3:} & 2\cdot(-1) + 1\cdot(11) & = & 9 & R2 & 5 & & \Rightarrow \; R2 = \text{“} \geq \text{”} \\
& 0 \leq 0, \quad -1 \leq 0, \quad 11 \geq 0 & & & & & \text{ok!} &
\end{array}$$

Stark dualitet ger att $z = w$, dvs. $-11 - c = -18 \;\Rightarrow\; c = 7$, vilket stämmer överens med att $b = 7$.

Slutligen, då $R2 = \text{“} \geq \text{”}$ är känd kan vi även bestämma relationen $R1$.

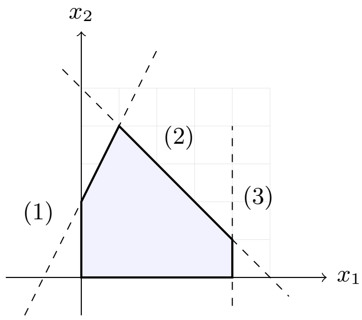
- Det duala problemet är ett min-problem
- Tredje bivillkoret är ett $\geq$-villkor, alltså normalform
- Det betyder att den tredje primala variabeln (x_3) ska ha teckenkrav på normalform, dvs. $R1 = \text{“} \geq \text{”}$.

b) Vi börjar med att notera att endast mängderna *i*) och *iii*) är konvexa.

Ett linjärt bivillkor ger upphov till antingen en linje (likhetsvillkor) eller ett halvrum (olikhetsvillkor), och båda dessa mängder är konvexa.

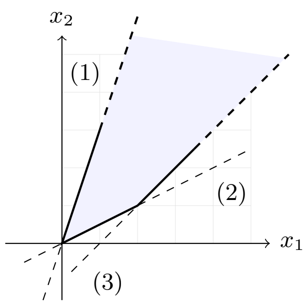
Vi vet att snittet av konvexa mängder också är en konvex mängd, och således är det inte möjligt att beskriva mängd *ii*) med hjälp av linjära bivillkor.

i)



$$
\begin{array}{rcrcrl}
-2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & (1)\\
x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (2)\\
x_1 & & & \leq & 4 & (3)\\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

iii)



$$
\begin{array}{rcrcrl}
-3x_1 & + & x_2 & \leq & 0 & (1)\\
x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0 & (2)\\
x_1 & - & x_2 & \leq & 1 & (3)\\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Uppgift 4.

Känslighetsanalys.

a) Öka högerled med 4 steg, från 10 till 14. Intervallet är $[8, 11]$, alltså en ändring utanför intervallet. Vi kan öka med $(11 - 10) = 1$ steg inom intervallet, skuggpriset är 0.5 (inom intervallet), vilket ger följande analys.

- Worst case: ökning inom intervallet, $1 \cdot 0.5 = 0.5$
- Best case: ökning hela vägen med samma skuggpris, $4 \cdot 0.5 = 2$

Vinsten ökar alltså inom intervallet [0.5, 2].

b) Beräkna det giltiga intervallet för målfunktionskoefficient c_2 med hjälp av formeln för reducerad kostnad, $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$. Kravet är att aktuell baslösning ska förbli optimal, dvs. $\bar{c}_N^T \leq 0$ eftersom vi har ett maximeringsproblem.

Från optimaltablån kan vi identifiera att basvariablerna är $x_B = \{x_1, x_2, s_3\}$ och att icke-basvariablerna är $x_N = \{s_1, s_2\}$, samt matrisen $B^{-1}N$. Slackvariablerna har målfunktionskoefficenter 0, och från resultatutskriften kan vi hitta det ursprungliga värdet för målfunktionskoefficient c_1. Det vi söker nu är gränser för c_2.

Vi får alltså att $c_N^T = (0, 0)^T$, $c_B^T = (3, c_2, 0)^T$ och $B^{-1}N$ enligt det som står i optimaltablån på bivillkorsraderna i kolumnerna under icke-basvariablerna.

$$\begin{aligned}\bar{c}_N^{\mathrm{T}} \;&=\; c_N^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N \;=\; (0,0) - (3, c_2, 0) \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; (0,0) - (4.5 - 2c_2,\; -1.5 + c_2) \;=\; (2c_2 - 4.5,\; 1.5 - c_2) \;\leq\; 0\end{aligned}$$

vilket ger två olikheter som resulterar i $1.5 \leq c_2 \leq 2.25$. Detta stämmer bra mot resultatutskriften som anger att intervallet för c_2 är [1.5, 2.25].

c) Ett nytt dualt bivillkor, $2v_1 + \alpha v_2 + 3v_3 \geq 2$, svarar mot en ny variabel i det primala problemet. Vi kan använda formeln $\bar{c}_{\text{ny}} = c_{\text{ny}} - v^T a_{\text{ny}}$ för att räkna ut reducerade kostnaden för den nya variabeln. För att det optimala målfunktionsvärdet inte ska påverkas måste $\bar{c}_{\text{ny}} \leq 0$.

Högerledet i det nya duala bivillkoret är detsamma som c_{ny} och bivillkorskoefficienterna svarar mot a_{ny}. Vi hämtar den aktuella duallösningen från optimaltablån och beräknar

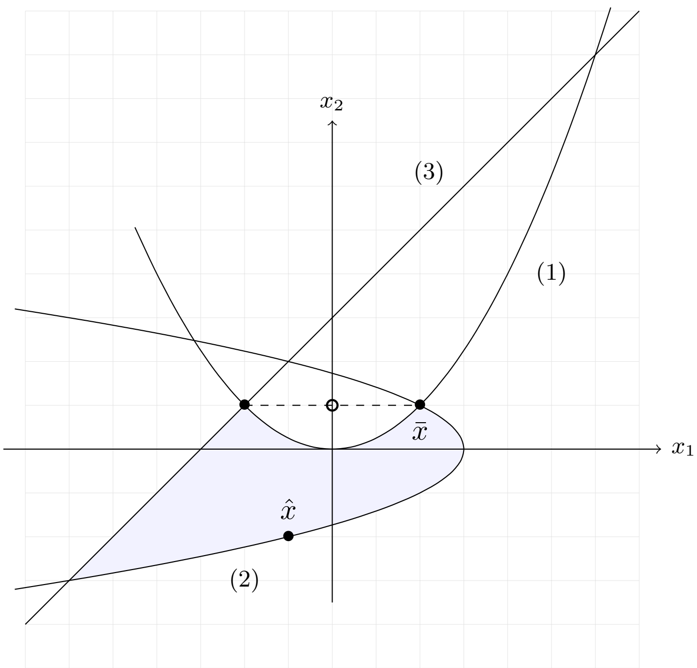
$$\begin{aligned}\bar{c}_{\text{ny}} \;=\; c_{\text{ny}} - v^T a_{\text{ny}} \;&=\; 2 \;-\; (0.5, 0.5, 0) \cdot (2, \alpha, 3)^T \\ &=\; 2 \;-\; (1 + 0.5\alpha + 0) \;=\; 1 - 0.5\alpha \;\leq\; 0\end{aligned}$$

vilket ger att $\alpha \geq 2$.

[Motsvarande beräkningar i det duala problemet är att välja α så att den aktuella duallösningen fortfarande är tillåten: $2 \cdot 0.5 + \alpha \cdot 0.5 + 3 \cdot 0 \;=\; 1 + 0.5\alpha \;\geq\; 2$. Detta ger givetvis samma svar, att $\alpha \geq 2$.]

Uppgift 5.

Illustrera problemet grafiskt och ta fram gradienter för alla bivillkor och för målfunktionen.



$$\nabla f(x) = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 5\lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bivillkorsgradienter och teckenkrav för multiplikatorerna:

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_1 \leq 0$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad v_2 \geq 0$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 \geq 0$$

a) Mängden är icke-konvex. Välj t.ex. $x^{(1)} = (-2, 1)^T$ och $x^{(2)} = (2, 1)^T$.

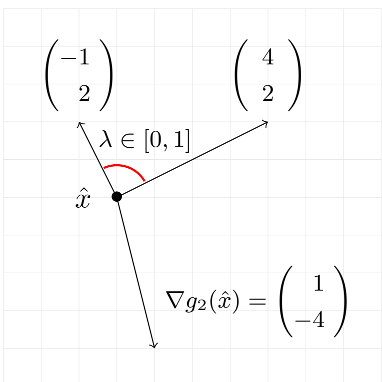
- Kontrollera att dessa punkter är tillåtna:

$$\begin{aligned} g_1(x^{(1)}) &= \tfrac{1}{4}(-2)^2 - 1 = 0 \geq 0, & g_1(x^{(2)}) &= \tfrac{1}{4}(2)^2 - 1 = 0 \geq 0 \\ g_2(x^{(1)}) &= (-2) + (1)^2 = -1 \leq 3, & g_2(x^{(2)}) &= (2) + (1)^2 = 3 \leq 3 \\ g_3(x^{(1)}) &= (-2) + 1 = -1 \leq 3, & g_3(x^{(2)}) &= (2) + 1 = 3 \leq 3 \end{aligned}$$

- Konvexkombinera, $x(\lambda) = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$, med t.ex. $\lambda = \frac{1}{2} \implies$ $x(\lambda) = \frac{1}{2}(-2, 1)^T + \frac{1}{2}(2, 1)^T = (0, 1)^T$, och $g_1(x(\lambda)) = 0 - 1 = -1 \not\geq 0$.

Vi har visat att $x(\lambda)$ inte är tillåten då $\lambda = \frac{1}{2}$, alltså är mängden icke-konvex.

b) Rita upp gradienter för målfunktionens två delar, samt alla aktiva bivillkorsgradienter i punkten $\hat{x}$.



Endast bivillkor (2) är aktivt, och dess multiplikator har teckenkravet $v_2 \geq 0$.

Med endast ett aktivt bivillkor måste $\nabla f(\hat{x}) \parallel \nabla g_2(\hat{x})$ gälla, men det är inte möjligt då $\lambda \in [0, 1]$.

Alltså kommer punkten $\hat{x}$ aldrig att bli en KKT-punkt.

c) Undersök vilka bivillkor som är aktiva i punkten $\bar{x} = (2,1)^T$.

1. Primal tillåtenhet

$$
\begin{array}{rclcrcll}
g_1(\bar{x}) & = & \frac{1}{4}(2)^2 - (1) & = & 0 & \geq & 0 & \text{ok!} \\
g_2(\bar{x}) & = & 2 + (1)^2 & = & 3 & \leq & 3 & \text{ok!} \\
g_3(\bar{x}) & = & -(2) + (1) & = & -1 & < & 3 & \text{ok!}
\end{array}
$$

2. Komplementaritet

$$
\begin{array}{lcrcl}
\text{Aktivt} & \Rightarrow & v_1 & = & ? \\
\text{Aktivt} & \Rightarrow & v_2 & = & ? \\
\text{Inte aktivt} & \Rightarrow & v_3 & = & 0
\end{array}
$$

Vi beräknar $\nabla f(\bar{x})$, $\nabla g_1(\bar{x})$ och $\nabla g_2(\bar{x})$, och sätter upp den duala tillåtenheten.

3. Konen: $$\begin{pmatrix} 4-5\lambda \\ 2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcll} v_1 & = & 2 - \frac{10}{3}\lambda & \leq 0 \\ v_2 & = & 2 - \frac{5}{3} & \geq 0 \end{array}$$

Lös ut för λ vilket ger att $\frac{3}{5} \leq \lambda \leq \frac{6}{5}$. Men eftersom $\lambda \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5} \leq \lambda \leq 1$.

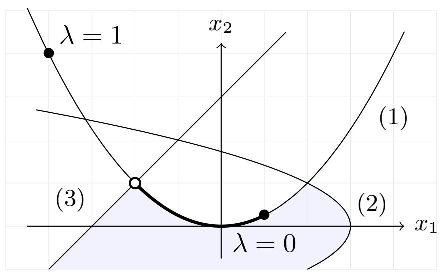
d) Att endast bivillkor (1) får vara aktivt implicerar följande:

- $g_2(x) < 3$ och $g_3(x) < 3$ (inaktiva, men punkten x måste vara primalt tillåten)
- $g_1(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{4}x_1^2, \quad v_1 \leq 0$

Sätt upp den duala tillåtenheten.

Konen: $$\begin{pmatrix} 4-5\lambda \\ 2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcll} v_1 & = & -2 \leq 0 & \text{ok!} \\ x_1 & = & 5\lambda - 4 & \Rightarrow \; x_2 = \frac{1}{4}(5\lambda-4)^2 \end{array}$$



Kandidater till KKT-punkter som funktion av λ: $x(\lambda) = (\ 4-5\lambda,\ \frac{1}{4}(5\lambda-4)^2\ )^T$. Dessa punkter följer bivillkor (1). För varje sådan punkt går det att beskriva $\nabla f(x)$ mha. den aktiva bivillkorsgradienten, $v_1 = -2$ samt ett lämpligt val av $\lambda \in [0,1]$.

Speciellt kan vi notera att för $\lambda = 0$ får man en tillåten punkt, medans för $\lambda = 1$ får man en otillåten punkt. Vi ser i bilden att om $x_1 > -2$ så kommer övriga krav att vara uppfyllda, dvs. att $g_2(x) < 3$ och $g_3(x) < 3$.

För att hitta gränsen för λ kan t.ex. $g_3(x(\lambda)) < 3$ användas. (Vi ser i figuren att bivillkor (2) inte är begränsande.) Enklast är dock att utnyttja kravet att $x_1 > -2$.

$$x_1(\lambda) = 5\lambda - 4 > -2 \quad \Rightarrow \quad \lambda > \frac{2}{5}$$

<u>Slutsats:</u>

Samtliga KKT-punkter där endast bivillkor (1) är aktivt ges av

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} 5\lambda - 4 \\ \frac{1}{4}(5\lambda-4)^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{5} < \lambda \leq 1$$

där $v_1 = -2$ och $v_2 = v_3 = 0$.