Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	30:e oktober 2018
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3 – 5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh
Jourhavande lärare:	Nils-Hassan Quttineh 013-28 21 85

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Vi står inför ett typiskt produktionsplaneringsproblem. Ett företag tillverkar olika produkter, $i \in I$, och man vill planera sin produktion för de kommande T veckorna.

Företaget har skrivit på ett kontrakt vilket förbinder dem att leverera exakt d_{it} antal enheter av produkt i under vecka t, och kostnaden för att producera en enhet av produkt i under vecka t ges av parametern c_{it}^{P}.

Alla färdigproducerade enheter, oavsett produktsort, måste passera en maskin som säkerställer att produkten ser bra ut. Maskinen har en maximal kapacitet på M_t antal enheter under vecka t. Godkända enheter transporteras sedan vidare antingen direkt till kund eller till företagets stora lagerutrymme. Kostnaden för att lagerhålla en enhet av produkt i från en vecka t till nästakommande vecka ges av parametern c_{it}^{L}.

Vid början av första veckan finns det L_i^0 enheter av produkt i tillgängliga i företagets lager, och vid slutet av planeringshorisonten önskar företaget att det finns åtminstone totalt K enheter i lager (oavsett produktsort).

a) Formulera en linjär optimeringsmodell för företagets produktionsplaneringsproblem som minimerar de totala kostnaderna för den givna kontraktsperioden. Samtliga förutsättningar och begränsningar som angivits måste respekteras. **(2p)**

b) Förutom det som redan har beskrivits i texten ovan, vilket är en förenklad version av verkligheten, skall följande begränsning även modelleras.

Varje produkt $i \in I$ går att klassificera som en produkt av antingen typ 1 eller typ 2, och mängden I kan därför delas upp i de två delmängderna I_1 och I_2. På grund av diverse produktionstekniska anledningar måste det varje vecka tillverkas minst dubbelt så många produkter av typ 1 jämfört med antalet produkter av typ 2. Utöka modellen från uppgift **a)** så att detta krav uppfylls. Se till att modellen förblir linjär. **(1p)**

c) Att exakt uppfylla efterfrågan d_{it} varje vecka visar sig vara problematiskt, och företaget vill därför utöka modellen med så kallad *backlog*. En backlog är helt enkelt att man en viss vecka tillåter sig att leverera för lite av en viss produkt, förutsatt att man förr eller senare kompenserar för detta så att man vid slutet av sista veckan under planeringsperioden ändå har levererat exakt så många produkter som kontraktet föreskriver.

Att inte leverera det man lovat i tid är dock inte gratis, och enligt kontraktet ska företaget för varje vecka t betala en straffavgift på c_{it}^{B} för det antal enheter av produkt i som vid denna tidpunkt inte har levererats (men som borde ha levererats). Vi antar att parameter $c_{it}^{B} > c_{it}^{L}$ för alla produkter och alla veckor.

Utöka modellen så att den tillåter backlog, och se till att modellen förblir linjär. **(1p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & (1) \\
& & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 & (2) \\
& & & & x_2 & \leq & 5 & (3) \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Rita upp det tillåtna området, markera dess extrempunkter, och namnge varje extrempunkt med en bokstav (A, B, ...). Lös sedan LP-problemet grafiskt och ange både optimallösningen och motsvarande optimala målfunktionsvärde. **(1p)**

b) Lös problemet med Simplexmetoden. Kontrollera att lösningen stämmer med resultatet från deluppgift **a)**. **(1p)**

c) Utgå från optimaltablån i deluppgift **b)**.

Tolka de aktuella basvariablerna som slackvariabler. Tag bort basvariablerna från problemet och skriv ner motsvarande optimeringsproblem (uttryckt endast i de aktuella icke-basvariablerna).

- Illustrera och lös detta optimeringsproblem grafiskt.
- Ange för varje extrempunkt i denna figur vilken extrempunkt den svarar mot i det ursprungliga problemet. (Ange bokstäverna.)

(2p)

Uppgift 3.

Här följer två fristående deluppgifter.

a) Betrakta följande primal–duala par av LP-problem.

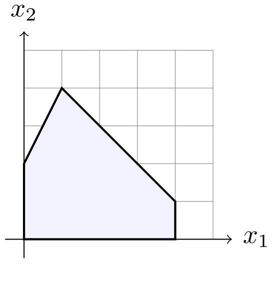
$$
\begin{array}{lllrcrcrcr}
(P) & \max & z = & 10x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & & \\
& \text{då} & & 2x_1 & - & 5x_2 & & & \leq & 3 \\
& & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & b \\
& & & x_1 & & & + & x_3 & \leq & -1 \\
& & & \multicolumn{7}{r}{x_1 \leq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \ R1 \ 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllrcrcrcr}
(D) & \min & w = & 3v_1 & + & cv_2 & - & v_3 & & \\
& \text{då} & & 2v_1 & + & v_2 & + & v_3 & \leq & 10 \\
& & & av_1 & + & v_2 & & & \geq & -1 \\
& & & & & 2v_2 & + & v_3 & R2 & 5 \\
& & & \multicolumn{7}{r}{v_1 \geq 0 \ , \ v_2 \leq 0 \ , \ v_3 \geq 0}
\end{array}
$$

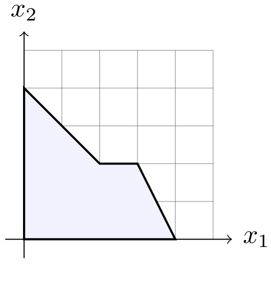
Givet är två punkter, $\bar{x} = (-1, 8, 0)^T$ och $\bar{v} = (0, -1, 11)^T$. För vilka värden på parametrarna a, b och c, samt olikheter $R1$ och $R2$, är dessa punkter optimala i primalen (P) respektive dualen (D)? **(2p)**

b) Det tillåtna området till ett optimeringsproblem beskrivs oftast med hjälp av en uppsättning linjära bivillkor. Beskriv följande tre mängder (en i taget) med hjälp av linjära bivillkor, om det är möjligt. Motivera annars kort och koncist varför det inte går.

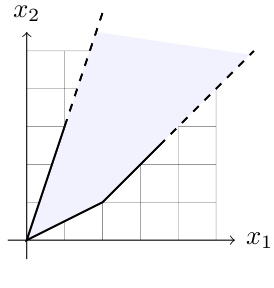
i)



ii)



iii)



(3p)

Uppgift 4.

Ett för oss okänt LP-problem har lösts till optimalitet. Samtliga slackvariabler infördes med bivillkorskoefficient +1 i ursprungstablån. Här nedan studerar vi dess optimaltablå, där målfunktionen har maximerats, samt motsvarande resultatutskrift för problemets lösning från AMPL.

Optimaltablå

bas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	0	0	0.5	0.5	0	17
x_1	0	1	0	1.5	−0.5	0	3
x_2	0	0	1	−2	1	0	4
s_3	0	0	0	−3	1	1	3

```
#---------------------------------------------------------------------
# LÖSNING FRÅN AMPL
#---------------------------------------------------------------------

: _objname      _obj :=
1   z             17

: _varname        _var    _var.rc    _var.down _var.current _var.up  :=
1   x[1]           3      0           2.667       3          4
2   x[2]           4      0           1.5         2           2.25  ;

: _conname    _con.slack _con.dual   _con.down _con.current _con.up  :=
1   villkor1       0       0.5          8          10          11
2   villkor2       0       0.5         21          24          30
3   villkor3       3       0            6           9          1e+20 ;

#---------------------------------------------------------------------
```

a) Baserat på resultatutskriften ovan, vilken är den starkaste slutsats man kan dra om värdet på z^* om högerledet i det första bivillkoret ökas från 10 till 14? **(1p)**

b) Med hjälp av information från optimaltablån och resultatutskriften, använd algebraiska metoder för att beräkna det giltiga intervallet för den målfunktionskoefficient som hör till x_2. Redovisa alla beräkningar noga. Givetvis kontrollerar man sedan att det erhållna svaret stämmer med resultatutskriften ovan. **(1p)**

c) Antag att man lägger till ett nytt bivillkor, $2v_1 + \alpha v_2 + 3v_3 \geq 2$, till motsvarande duala LP-problem. (Här är v_1 den dualvariabel som hör ihop med ursprungligt villkor 1, osv.) Vad svarar detta nya bivillkor mot i det primala problemet?

Avgör algebraiskt, med beräkningar för det primala problemet, vilka värden på α som gör att man direkt kan säga att detta "nya" inte kommer att påverka det optimala målfunktionsvärdet. Det är fritt fram att använda information ur både optimaltablån och resultatutskriften. **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta problemet

$$
\begin{array}{llcll}
\max & f(x) & = & \lambda(-x_1 + 2x_2) + (1-\lambda)(4x_1 + 2x_2) & \\
\text{då} & g_1(x) & = & \frac{1}{4}x_1^2 - x_2 \geq 0 & (1) \\
 & g_2(x) & = & x_1 + x_2^2 \leq 3 & (2) \\
 & g_3(x) & = & -x_1 + x_2 \leq 3 & (3)
\end{array}
$$

där parametern $\lambda \in [0, 1]$. Observera att problemets målfunktion kan tolkas som en konvexkombination av två olika linjära målfunktioner.

a) Undersök om problemet är konvext. Ett matematiskt bevis eller motbevis krävs för att få poäng. **(1p)**

b) Ge en grafisk motivering till varför punkten $\hat{x} = (-1, -2)^T$ inte kan vara en KKT-punkt för något värde på $\lambda \in [0, 1]$. **(1p)**

c) För vilka värden på $\lambda \in [0, 1]$ är punkten $\bar{x} = (2, 1)^T$ en KKT-punkt? **(1p)**

d) Under förutsättningen att endast bivillkor (1) får vara aktivt, ange samtliga KKT-punkter som en funktion av värdet på parametern $\lambda \in [0, 1]$. Motsvarande värden på multiplikatorerna ska också anges.

Tips: Undersök speciellt vad som händer då $\lambda = 0$ respektive $\lambda = 1$. **(2p)**