# Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 21:a augusti 2018

## Uppgift 1.

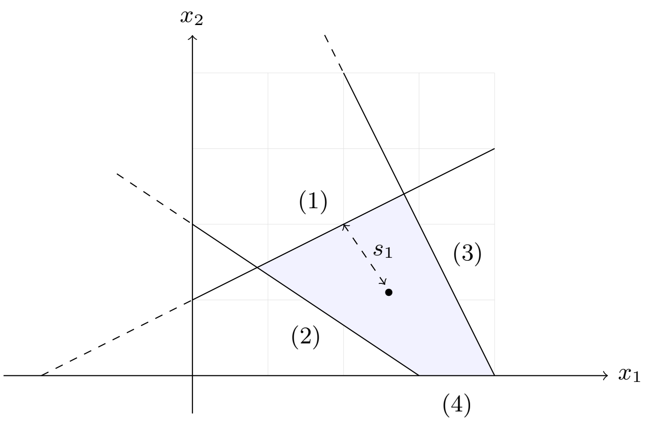
**a)** Variabeldefinition: $x_i \;=\;$ antal poäng till uppgift $i$, $i = 1, \ldots, 3$

Målfunktion: $\max\ z \;=\; 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3$

Bivillkor:

$$
\begin{array}{rcll}
x_1 + x_2 + x_3 & = & 100 & \text{[totalt 100 poäng]} \\
x_1 & \geq & 20 & \text{[min-krav uppgift 1]} \\
x_2 & \geq & 20 & \text{[min-krav uppgift 2]} \\
x_3 & \geq & 30 & \text{[min-krav uppgift 3]} \\
0.25x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 & \geq & 40 & \text{[``svåra'' poäng]} \\
x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 & \geq & 0 & \text{[Teckenkrav]}
\end{array}
$$

**b)** Bestäm den punkt som tillhör det skuggade området vars minsta slackavstånd till någon av de avgränsande linjerna är så stort som möjligt.



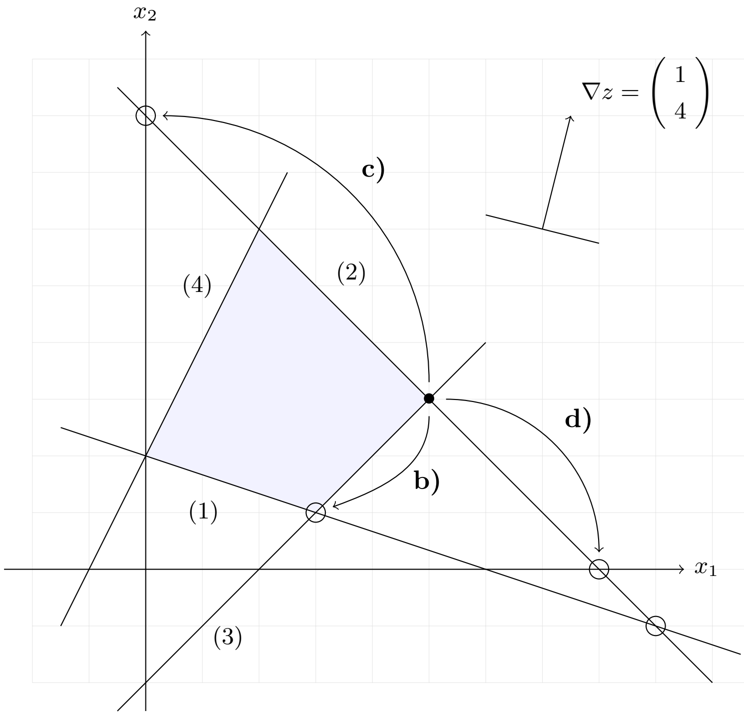

Variabeldefinition: $y \;=\;$ värdet på den minsta slackvariabeln.

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = y \\
\text{då} & y \leq s_i \quad , \quad i = 1, \ldots, 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrl}
-x_1 + 2x_2 + s_1 & = & 2 & (1) \\
2x_1 + 3x_2 - s_2 & = & 6 & (2) \\
2x_1 + x_2 + s_3 & = & 8 & (3) \\
x_2 - s_4 & = & 0 & (4) \\
x_1\ ,\ x_2\ ,\ s_1\ ,\ s_2\ ,\ s_3\ ,\ s_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

## Uppgift 2.

**a)** Rita upp det tillåtna området.




**b)** Välj en inkommande variabel med "felaktig" reducerad kostnad, för ett maximeringsproblem innebär det en negativ reducerad kostnad varför $s_2$ måste bli inkommande.

| bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $\bar{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 2.5 | −1.5 | 0 | 17 | (0) | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0 | 5 | (1) | ink: $s_2$ |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | −0.5 | 0 | 3 | (2) | utg: $s_1$ |
| $s_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\boxed{2}$ | −1 | 0 | 8 | (3) | |
| $s_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1.5 | 1 | 9 | (4) | |
| $z$ | 1 | 0 | 0 | −1.25 | 0 | −0.25 | 0 | 7 | (0) | minimum: |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | −0.25 | 0 | 0.75 | 0 | 3 | (1) | $x^*_{\min} = (3, 1)^{\mathrm{T}}$ |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | −0.25 | 0 | −0.25 | 0 | 1 | (2) | $z^*_{\min} = 7$ |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | −0.5 | 0 | 4 | (3) | |
| $s_4$ | 0 | 0 | 0 | −0.25 | 0 | 1.75 | 1 | 7 | (4) | |

Målfunktionsvärdet minskar givetvis eftersom vi valde en inkommande variabel med negativ reducerad kostnad.

**c)** Välj korrekt inkommande basvariabel, men välj utgående basvariabel "felaktigt". Välj dock ett positivt pivotelement.

| bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $\bar{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 2.5 | −1.5 | 0 | 17 | (0) | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.5 | $\boxed{0.5}$ | 0 | 5 | (1) | ink: $s_3$ |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | −0.5 | 0 | 3 | (2) | utg: $x_1$ |
| $s_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | −1 | 0 | 8 | (3) | |
| $s_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1.5 | 1 | 9 | (4) | |
| $z$ | 1 | 3 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 32 | (0) | otillåtet |
| $s_3$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 10 | (1) | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | (2) | |
| $s_1$ | 0 | 2 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 18 | (3) | |
| $s_4$ | 0 | −3 | 0 | 0 | −1 | 0 | 1 | −6 | (4) | |

Vi valde en inkommande variabel med positiv reducerad kostnad, vilket gör att målfunktionsvärdet ökar. Däremot, eftersom vi valde utgående basvariabel felaktigt hamnar vi i en otillåten baslösning.

Att vi använde ett positivt pivotelement gör att vi rör oss bort från bivillkor (3) i rätt riktning, dvs. den inkommande basvariabeln får ett positivt värde.

**d)** Välj korrekt inkommande basvariabel, men välj utgående basvariabel "felaktigt". Välj dock ett negativt pivotelement.

| bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $\bar{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 2.5 | −1.5 | 0 | 17 | (0) | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0 | 5 | (1) | ink: $s_3$ |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.5 | $\boxed{-0.5}$ | 0 | 3 | (2) | utg: $x_2$ |
| $s_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | −1 | 0 | 8 | (3) | (alt. $s_1$) |
| $s_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1.5 | 1 | 9 | (4) | |
| $z$ | 1 | 0 | −3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | (0) | otillåtet |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | (1) | |
| $s_3$ | 0 | 0 | −2 | 0 | −1 | 1 | 0 | −6 | (2) | |
| $s_1$ | 0 | 0 | −2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | (3) | |
| $s_4$ | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 18 | (4) | |

Vi valde en inkommande variabel med positiv reducerad kostnad, men eftersom vi valde utgående basvariabel felaktigt hamnar vi i en otillåten baslösning.

Att vi använde ett negativt pivotelement gör att vi rör oss bort från bivillkor (3) i fel riktning, vilket leder till att målfunktionsvärdet istället minskar, samt att den inkommande basvariabeln får ett negativt värde.

(Vid val av utgående variabel går det att välja $s_1$ istället för $x_2$. Då hamnar man i punkten $(9, -1)^T$ istället, men slutsatserna ovan är samma.)

## Uppgift 3.

**a)** Öka högerled, 230 till 280, ändring inom intervall. Skuggpriset 22 gäller alltså hela vägen, vilket ger en ökad vinst på $50 \cdot 22 = 1100$ kr.

**b)** Minska försäljningspriset för pizzabitar av sort 5, målfunktionskoefficienten minskar från 120 till 108, vilket är en ändring inom intervallet (undre gräns 44). Baslösningen förblir alltså densamma, vilket betyder att man fortfarande kommer tillverka 5 pizzor av sort 5, dvs. 30 bitar. Detta leder till en minskad vinst på $5 \cdot 12 = 2 \cdot 30 = 60$ kr.

**c)** Ytterligare 1 pizza i den vedeldade ugnen, det betyder att högerledet ökar från $120 \cdot 8 = 960$ till $120 \cdot 9 = 1080$. Övre gränsen på intervallet är dock 984, vilket gör att vi kan öka med $(984 - 960) = 24$ steg inom intervallet. Skuggpriset inom intervallet är 5.5, vilket ger följande analys.

- Worst case: ökning inom intervallet, $24 \cdot 5.5 = 132$
- Best case: ökning hea vägen med samma skuggpris, $120 \cdot 5.5 = 660$

Vinsten ökar alltså inom intervallet $[132, 660]$.

**d)** Vi ska räkna på en ny variabel, bestämma vilken målfunktionskoefficient den måste ha för att bli lönsam. Kostnaden för denna nya variabel beror dock på hur mycket av de olika exklusiva råvarorna vi väljer att ha med på pizzan.

Ny variabel, vi kan använda formeln $\bar{c}_{\text{ny}} = c_{\text{ny}} - v^T a_{\text{ny}}$ för att räkna ut dess reducerade kostnad. Problemet är att vi inte vet exakt vad alla koefficienter i vektorn $a_{\text{ny}}$ ska vara, mängden råvara av respektive sort är ännu inte bestämt. Ansätt följande:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{\text{ny}} = c_{\text{ny}} - v^T a_{\text{ny}} &= c_{\text{ny}} - (5.5, 0, 22, 24, 19, 0) \cdot (6, 0, a_3, a_4, a_5, 0)^T \\ &= c_{\text{ny}} - (\ 33 + 22a_3 + 24a_4 + 19a_5\ ) \end{aligned}$$

Vi måste nu bestämma mängden för varje råvara ($a_3,\ a_4,\ a_5$), med målsättningen att totalkostnaden för alla råvaror blir så låg som möjligt. Vi formulerar detta som ett optimeringsproblem.

$$\begin{array}{llcl} \min & z = & 22a_3 + 24a_4 + 19a_5 & \Rightarrow \quad \text{Optimum:} \\ \text{då} & & a_3 + a_4 + a_5 \ \geq \ 8 & z^* = 171 \\ & & 1 \ \leq \ a_3 \ \leq \ 6 & a_3 = 3 \\ & & 2 \ \leq \ a_4 \ \leq \ 4 & a_4 = 2 \\ & & 0 \ \leq \ a_5 \ \leq \ 3 & a_5 = 3 \end{array}$$

Problemet går att lösa på lite olika vis, t.ex. med simplexmetoden. Enklast är att lösa problemet genom att "girigt" fylla på med råvaror tills man får ihop 8 enheter.

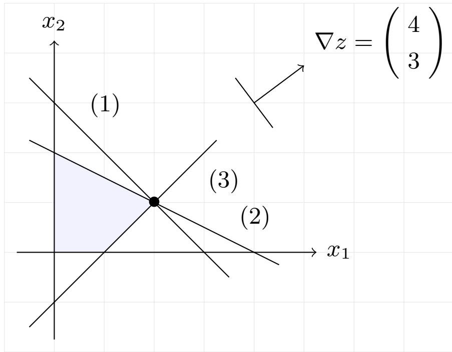
Då $a_5$ är billigast, välj så många som möjligt. Då $a_4$ är dyrast, välj så få som möjligt. Krav att $a_3 \geq 1$, men $a_3$ är bättre än $a_4$. Det billigaste sättet att uppfylla alla krav är att välja $a_3 = 3$, $a_4 = 2$ och $a_5 = 3$, vilket ger en total kostnad på $33 + 171 = 204$.

Vi får kravet att $\bar{c}_{\text{ny}} > 204 = 6 \cdot 34$ för att den nya pizzasorten ska bli lönsam. Med ett försäljningspris på 34 kr per pizzabit går det precis jämnt upp.

## Uppgift 4.

En illustration av det primala problemet.

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \mid v_1 \geq 0 \\
& & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 & \mid v_2 \geq 0 \\
& & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & \mid v_3 \geq 0 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$




**a)** Punkten $\bar{v} = (2, 1, 1)^T$ är tillåten i det duala problemet.

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\min & w = & 6v_1 & + & 8v_2 & + & 2v_3 & & \\
\text{då} & & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & \geq & 4 \\
& & v_1 & + & 2v_2 & - & v_3 & \geq & 3 \\
& & v_1 & , & v_2 & , & v_3 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{Dualt tillåten:} \\
2+1+1 \quad = 4 \geq 4 \\
2+2\cdot 1-1 = 3 \geq 3 \\
v_i \geq 0, \; i = 1,2,3
\end{array}
$$

Betrakta nu komplementvillkoren för punkten $\bar{v}$.

$$
\left.
\begin{array}{lcll}
v_1 \cdot (\, x_1 + x_2 - 6 \,) & = & 0, & \bar{v}_1 \neq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6 \\
v_2 \cdot (\, x_1 + 2x_2 - 8 \,) & = & 0, & \bar{v}_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 8 \\
v_3 \cdot (\, x_1 - x_2 - 2 \,) & = & 0, & \bar{v}_3 \neq 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 2
\end{array}
\right\}
$$

Ekvationssystemet ger att $x_1 = 4$ och $x_2 = 2$, vilket är en primalt tillåten lösning. Vi har en dualt tillåten lösning, och dess komplementära primala lösning är också tillåten. Det betyder att $\bar{v} = (2, 1, 1)^T$ är optimal. (Och likaså är $\bar{x} = (4, 2)^T$ optimal.)

**b)** Det primala problemet på standardform.

$$
\begin{array}{llrcrccccl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & +s_1 & & & = & 6 \\
& & x_1 & + & 2x_2 & & +s_2 & & = & 8 \\
& & x_1 & - & x_2 & & & +s_3 & = & 2 \\
& & x_1 & , & x_2 & ,\ s_1 & ,\ s_2 & ,\ s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

I punkten $\bar{x} = (4, 2)^T$ är alla bivillkor aktiva, vilket ger att $s_1 = s_2 = s_3 = 0$.

Problemet har 3 bivillkor, alltså behövs 3 basvariabler, men endast två variabler är strikt positiva ($x_1$ och $x_2$). Vilken som av de tre slackvariablerna fungerar som den sista basvariabeln, och följande uppsättningar av basvariabler är baslösningar som beskriver $\bar{x}$.

$$\{x_1, x_2, s_1\} \;,\; \{x_1, x_2, s_2\} \;,\; \{x_1, x_2, s_3\}$$

Dessa är degenererade baslösningar.

**c)** Bivillkor (1) kan skrivas som en positiv linjarkombination av bivillkor (2) och (3). Vill att $\lambda_1[x_1 + 2x_2 \leq 8] + \lambda_2[x_1 - x_2 \leq 2] = [x_1 + x_2 \leq 6]$, matcha koefficienterna:

$$
\left.
\begin{array}{rrcl}
x_1: & \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 & = & 1 \\
x_2: & \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot (-1) & = & 1 \\
HL: & \lambda_1 \cdot 8 + \lambda_2 \cdot 2 & = & 6
\end{array}
\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \tfrac{2}{3},\ \lambda_2 = \tfrac{1}{3}. \quad \Rightarrow \quad (1) \;=\; \tfrac{2}{3}(2) \;+\; \tfrac{1}{3}(3)
$$

## Uppgift 5.

Vi börjar med att ta fram gradient och Hessian för $f(x)$, samt Hessianens invers.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 5 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi noterar att $H(x)$ är positivt definit, ledande underdeterminanter $\det h_1 = 1 > 0$ och $\det h_2 = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 1 > 0$, vilket betyder att $f(x)$ är en strikt konvex funktion.

**a)** Eftersom $f(x)$ är strikt konvex finns ett unikt lokalt optimum, som då också är globalt optimum. Använd Newtons metod, börja i punkten $\bar{x} = (1,1)^T$.

$$\begin{aligned} d_{NM} &= -H^{-1}(\bar{x})\nabla f(\bar{x}) = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ x^{(1)} &= x^{(0)} + d_{NM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eftersom $\nabla f(x^{(1)}) = (0,0)^T$ är vi klara efter första iterationen.

**b)** BL med intervallhalvering, börja i punkten $\hat{x} = (0,-3)^T$.

$$\begin{aligned} d_{BL} &= -\nabla f(\bar{x}) = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x(t) &= x^{(0)} + t d_{BL} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi får att

$$\begin{aligned} f(t) &= \tfrac{1}{2}t^2 + t \cdot (t-3) + (t-3)^2 + 2t + 5(t-3) \\ f'(t) &= t + 2t - 3 + 2t - 6 + 2 + 5 = 5t - 2 \end{aligned}$$

Börja med att bekräfta att intervallets ändpunkter ger oss olika tecken på derivatan.

$$f'(0) = -2 < 0, \quad f'(1) = 5 \cdot 1 - 2 = 3 > 0$$

Intervallhalveringen blir: [Notera att $f'(t) = 0 \Rightarrow t^* = \frac{2}{5} = 0.4$]

| $k$ | $a$ | $m$ | $b$ | $b-a$ | $f'(m)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.5 | 1 | $1-0 = 1 > 0.3$ | $5 \cdot 0.5 - 2 = 0.5 > 0$ |
| 1 | 0 | 0.25 | 0.5 | $0.5-0 = 0.5 > 0.3$ | $5 \cdot 0.25 - 2 = -0.75 < 0$ |
| 2 | 0.25 | 0.375 | 0.5 | $0.5-0.25 = 0.25 < 0.3$ | Stop! |

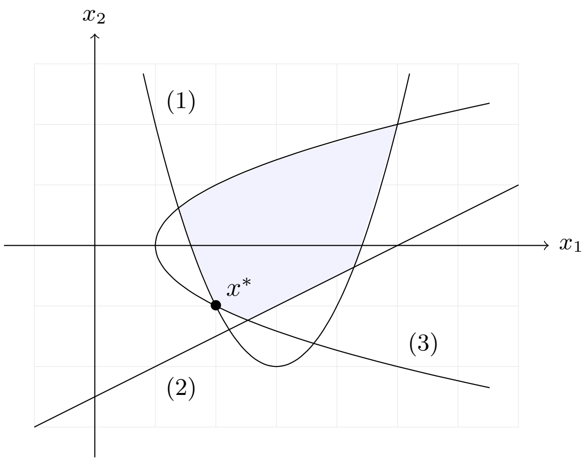
Efter två iterationer är intervallet $[0.25, 0.5]$ och dess längd är $0.25 < 0.3$. Avbryt och sätt $t = 0.375 = \frac{3}{8}$, mittpunkten på intervallet. Ny punkt blir $x^{(1)} = x^{(0)} + t \cdot d_{BL}$,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\tfrac{3}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^{(1)}) = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Den nya punken är inte optimal ty $||\nabla f(x^{(1)})|| > 0$.

**c)** Vi illustrerar problemet grafiskt och tar fram gradienterna för bivillkoren. Skriv om bivillkor (3) till ett $\leq$-villkor.

$$(1): \underbrace{(x_1-3)^2 - x_2}_{g_1(x)} \leq 2, \qquad (2): \underbrace{x_1 - 2x_2}_{g_2(x)} \leq 5, \qquad (3): \underbrace{-x_1 + x_2^2}_{g_3(x)} \leq -1,$$




$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

För att bevisa att $\bar{x}$ är globalt optimum till problemet behöver vi göra två saker:

- Visa att problemet är konvext
- Visa att punkten $\bar{x}$ uppfyller KKT-villkoren.

Problemet är konvext:

Vi har ett minimeringsproblem, vill alltså visa att $f(x)$ är en konvex funktion (vilket vi redan har gjort) och att det tillåtna området är en konvex mängd. Vi utnyttjar satsen att mängden $\{x : g(x) \leq b\}$ är konvex om funktionen $g(x)$ är konvex.

Alla tre funktioner, $g_1(x) = (x_1-3)^2 - x_2 = x_1^2 - 6x_1 + 9 - x_2$, $g_2(x) = x_1 - 2x_2$ och $g_3(x) = -x_1 + x_2^2$ är konvexa (positiva kvadrattermer och linjära termer).

Punkten $\bar{x}$ är KKT:

Visa att punkten $\bar{x} = (2, -1)^T$ är en KKT-punkt, dvs. kontrollera primal tillåtenhet, komplementaritet och dual tillåtenhet.

| 1. Primala tillåtenhet | | | 2. Komplementaritet | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1): | $(-1)^2 - (-1) = 2 \leq 2$ | ok! | Aktivt | $\Rightarrow$ | $v_1 = ?$ |
| (2): | $2 - 2(-1) = 4 < 5$ | ok! | Inte aktivt | $\Rightarrow$ | $v_2 = 0$ |
| (3): | $-2 + (-1)^2 = -1 \leq -1$ | ok! | Aktivt | $\Rightarrow$ | $v_3 = ?$ |

Vi beräknar $\nabla f(\bar{x})$, $\nabla g_1(\bar{x})$ och $\nabla g_3(\bar{x})$, och sätter upp den duala tillåtenheten.

Konen: $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= -\tfrac{1}{3} \leq 0 \text{ ok!} \\ v_3 &= -\tfrac{1}{3} \leq 0 \text{ ok!} \end{aligned}$$

Då vi har ett minimeringsproblem och $\leq$-villkor blir teckenkraven $v_i \leq 0,\ i = 1, 2, 3$. Punkten $\bar{x}$ uppfyller således alla KKT-villkor med $v = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$.

Slutsats:

Vi har en KKT-punkt i ett konvext problem $\Rightarrow$ $x^* = \bar{x} = (2, -1)^T$.