Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	21:a augusti 2018
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3 – 5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh
Jourhavande lärare:	Nils-Hassan Quttineh 013-28 21 85

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Betrakta följande fristående modelleringsuppgifter.

a) En tentamenskonstruktör har satt samman en tentamen som består av tre uppgifter, vilka nu ska poängsättas. Med hänsyn till att uppgifterna är olika omfattande ska uppgifterna 1 och 2 ha minst 20 poäng vardera, medan uppgift 3 ska ha minst 30 poäng. Uppgifterna ska sammanlagt ge 100 poäng.

Uppgift 1 består till 25% av frågor som kräver mer än endast grundläggande kunskaper. Motsvarande andelar för uppgifterna 2 och 3 är 50%. Konstruktören vill att minst 40 av poängen på tentamen ska kräva mer än grundläggande kunskaper.

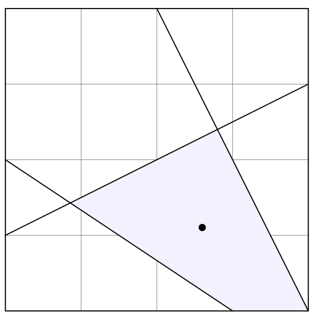
Konstruktören förväntar sig att de tenterande studenterna kommer att få i genomsnitt 50% av den totala poängen på uppgift 1, 40% av totala poängen på uppgift 2 och 30% av totala poängen på uppgift 3.

Slutligen vill konstruktören fördela de 100 poängen på de tre uppgifterna så att den förväntade genomsnittliga totala poängen blir så hög som möjligt.

Formulera en linjär optimeringsmodell för konstruktörens problem. **(2p)**

b) Betrakta figuren nedan.

Låt avståndet från en tillåten punkt till ett bivillkor definieras av värdet på motsvarande slackvariabel. Antag att man vill bestämma den punkt som tillhör det skuggade området vars minsta avstånd till var och en av de avgränsande linjerna är så stort som möjligt.



Formulera en linjär optimeringsmodell som hittar denna punkt.

Tips: Placera origo i nedre vänstra hörnet. **(2p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & x_1 & + & 4x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 & (1) \\
& & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & (2) \\
& & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & (3) \\
& & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & (4) \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Låt s_1, s_2, s_3 och s_4 vara slackvariabler till bivillkor (1) – (4). Betrakta simplextablån för en given icke-optimal baslösning.

bas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}$
z	1	0	0	0	2.5	−1.5	0	17
x_1	0	1	0	0	0.5	0.5	0	5
x_2	0	0	1	0	0.5	−0.5	0	3
s_1	0	0	0	1	2	−1	0	8
s_4	0	0	0	0	0.5	1.5	1	9

Varje delfråga **b) – d)** utgår från denna tablå. Det går alltså bra att svara på dessa delfrågor oberoende av de andra.

a) Rita upp det tillåtna området. Gör en stor och tydlig bild! **(1p)**

b) Gör en pivotering med en "felaktig" inkommande variabel, dvs. en variabel som *inte* kan vara inkommande enligt det korrekta kriteriet. Välj dock rätt utgående variabel. Markera den erhållna punkten i figuren. Vad händer med målfunktionsvärdet? Varför? **(1p)**

c) Gör en pivotering med korrekt inkommande variabel, men med felaktigt val av utgående variabel. Använd dock ett *positivt* pivotelement. Markera den erhållna punkten i figuren. Vilken typ av lösning fås? Varför? **(1p)**

d) Gör en pivotering med rätt inkommande variabel, men med felaktigt val av utgående variabel. Använd nu ett *negativt* pivotelement. Markera den erhållna punkten i figuren. Vilken typ av lösning fås? Varför? **(1p)**

Uppgift 3.

En pizzabagare har som affärsidé att sälja pizzabitar under lunchen. Pizzabagaren erbjuder 5 olika pizzasorter, och man tillagar hela pizzor vilka sedan skärs upp i 6 bitar per pizza och dessa säljs styckvis. (Att det är hela pizzor som tillagas är dock relaxerat i modellen, annars får man inte ut någon dual information.)

Försäljningen av pizzabitar sker endast under en begränsad tid, det är under lunchtimmarna 11.30–13.30, och då man vill servera bitarna rykande färska så måste de gräddas mellan 11.20 och 13.20. Priset för en pizzabit av respektive sort är 25, 22, 20, 15 och 20 kr. Efterfrågan är så stor att det går att anta att allt som tillverkas kan säljas. Sort 4 är otroligt populär, kanske beroende på det låga försäljningspriset, och det måste därför tillverkas åtminstone 60 sådana bitar.

Vid tillverkningen av de olika sorterna används ett flertal olika råvaror, och förutom vissa standardingredienser (som det finns obegränsade mängder av) används även mer exklusiva råvaror, betecknade råvara 1, 2 och 3, med begränsad tillgång. Hur mycket som går åt av dessa exklusiva råvaror, samt hur stor tillgången är för var och en av dem, framgår av modellen här nedanför.

Beroende på vilken pizzasort det är så ska pizzan antingen gräddas i den vedeldade ugnen (sort 1 och 2) eller i någon av de två vanliga pizzaugnarna (sort 3, 4 och 5) som finns i restaurangens kök. Vedeldade pizzor gräddas i 6 minuter, övriga pizzor gräddas i 8 minuter. Det får plats som mest 8 stycken pizzor samtidigt i varje ugn.

Pizzabagaren vill nu bestämma hur många pizzor av varje sort som man bör tillverka under lunchen för att maximera sina inkomster. Modellen och lösningen till motsvarande LP-problem finns att skåda i utskriften på nästa sida. Använd denna information för att svara på frågorna nedan. Motivera alla svar!

```
#----------------------------------------------------------------------
# MODELL
#----------------------------------------------------------------------

var P1 >= 0;            # Antal tillverkade pizzor av sort 1
var P2 >= 0;            # Antal tillverkade pizzor av sort 2
var P3 >= 0;            # Antal tillverkade pizzor av sort 3
var P4 >= 0;            # Antal tillverkade pizzor av sort 4
var P5 >= 0;            # Antal tillverkade pizzor av sort 5


maximize vinst:   6*(25*P1 + 22*P2 + 20*P3 + 15*P4 + 20*P5);

subject to
Vedugn:               6*P1 +  6*P2                          <=  120*8;
Standardugn:                       8*P3 +  8*P4 +  8*P5  <=  240*8;
Ravara1:              1*P1 +  5*P2        +  3*P4 +  2*P5  <=  230;
Ravara2:                      2*P2 +  5*P3 +  1*P4          <=  130;
Ravara3:              5*P1 +  3*P2               +  4*P5  <=  820;
krav:                                       6*P4          >=   60;

#----------------------------------------------------------------------
```

```
#---------------------------------------------------------------------
# LÖSNING
#---------------------------------------------------------------------

: _objname      _obj :=
1  vinst        29040

: _varname        _var    _var.rc     _var.down _var.current _var.up  :=
1   P1             160       0           117       150        1e+20
2   P2               0    -116       -1e+20        132          248
3   P3              22       0             0       120          450
4   P4              20       0            24        90          204
5   P5               5       0            44       120          146.4 ;

: _conname    _con.slack _con.dual  _con.down _con.current _con.up  :=
1   Vedugn          0       5.5          840       960          984
2   Standardugn  1544       0            376      1920        1e+20
3   Ravara1         0      22            200       230          560
4   Ravara2         0      24             20       130         1095
5   Ravara3         0      19            800       820          880
6   krav           60       0        -1e+20         60          120 ;

#---------------------------------------------------------------------
```

a) Antag att pizzabagaren får tillgång till ytterligare 50 enheter av råvara 1, vad händer då med vinsten? **(1p)**

b) Vad händer med vinsten om försäljningspriset för pizzabitar av sort 5 minskar med 2 kr? **(1p)**

c) Vad händer med vinsten om pizzabagaren kommer på ett sätt att få plats med ytterligare en pizza i den vedeldade ugnen? **(1p)**

d) Pizzabagaren funderar på att introducera en ny pizzasort, som ger 6 bitar och som måste gräddas i den vedeldade ugnen under 6 minuter, men klurar på hur mycket av de olika exklusiva råvarorna som ska användas.

Följande krav måste uppfyllas:
- Som minst 8 enheter av de exklusiva råvarorna måste ingå.
- Som minst 1 och som mest 6 enheter av råvara 1 ingår.
- Som minst 2 och som mest 4 enheter av råvara 2 ingår.
- Som minst 0 och som mest 3 enheter av råvara 3 ingår.

Hjälp pizzabagaren att bestämma andelarna för varje ingrediens så att den nya pizzasorten blir så lönsam som möjligt. Vilket försäljningspris (för varje pizzabit) måste sättas för att den nya sorten faktiskt ska börja tillverkas? **(2p)**

Uppgift 4.

Betrakta följande LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & (1) \\
& & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 & (2) \\
& & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & (3) \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Avgör om den duala punkten $\bar{v} = (2, 1, 1)^T$ är optimal. Använd dualitet och komplementaritet. **(2p)**

b) Skriv om problemet på standardform och ange samtliga baslösningar som beskriver punkten $\hat{x} = (4, 2)^T$. **(1p)**

c) Visa att bivillkor (1) är redundant genom att beskriva det som en positiv linjärkombination av bivillkor (2) och (3). **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta följande icke-linjära funktion.

$$f(x) \;=\; \tfrac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 5x_2$$

I samtliga deluppgifter ska funktionen $f(x)$ minimeras.

a) Hitta ett lokalt optimum till $f(x)$ med hjälp av Newtons metod. Utgå från punkten $\bar{x} = (1, 1)^T$ och utför som mest 2 iterationer. **(1p)**

b) Utgå från punkten $\hat{x} = (0, -3)^T$ och utför 1 iteration av Brantaste lutningsmetoden. Intervallhalveringsmetoden ska användas för att bestämma steglängden, börja med intervallet $[0, 1]$ och avbryt då intervallets längd är mindre än 0.3, och låt steglängden vara mitt-punkten för det slutgiltiga intervallet. **(1p)**

c) Bevisa att punkten $x^* = (2, -1)^T$ är globalt optimum till följande icke-linjära optimeringsproblem.

$$\begin{array}{llcrcll}
\min & f(x) & & & & & \\
\text{då} & (x_1-3)^2 & - & x_2 & \le & 2 & (1) \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \le & 5 & (2) \\
 & x_1 & - & x_2^2 & \ge & 1 & (3)
\end{array}$$

(2p)