Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 30:e maj 2018

Uppgift 1.

a) Variabeldefinition:

x_i = antal pizzor av sort i som tillverkas, $i = 1, \ldots, 5$

Målfunktion:

$$\max \quad z = 6 \cdot (25x_1 + 22x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 20x_5)$$

Bivillkor:

$$\begin{array}{lcll}
6 \cdot (x_1 + x_2) & \leq & 120 \cdot 8 & \text{[vedeldad ugn]} \\
8 \cdot (x_3 + x_4 + x_5) & \leq & 120 \cdot 8 \cdot 2 & \text{[vanliga ugnar]} \\
1x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 2x_5 & \leq & 400 & \text{[Råvara 1]} \\
0x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 1x_4 + 0x_5 & \leq & 130 & \text{[Råvara 2]} \\
5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 4x_5 & \leq & 300 & \text{[Råvara 3]} \\
6x_4 & \geq & 60 & \text{[Krav sort 4]} \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq & 0 & \text{[Teckenkrav]}
\end{array}$$

b) Optimistisk skattning. Om bivillkoren gällande de exklusiva råvarorna tas bort återstår följande krav:

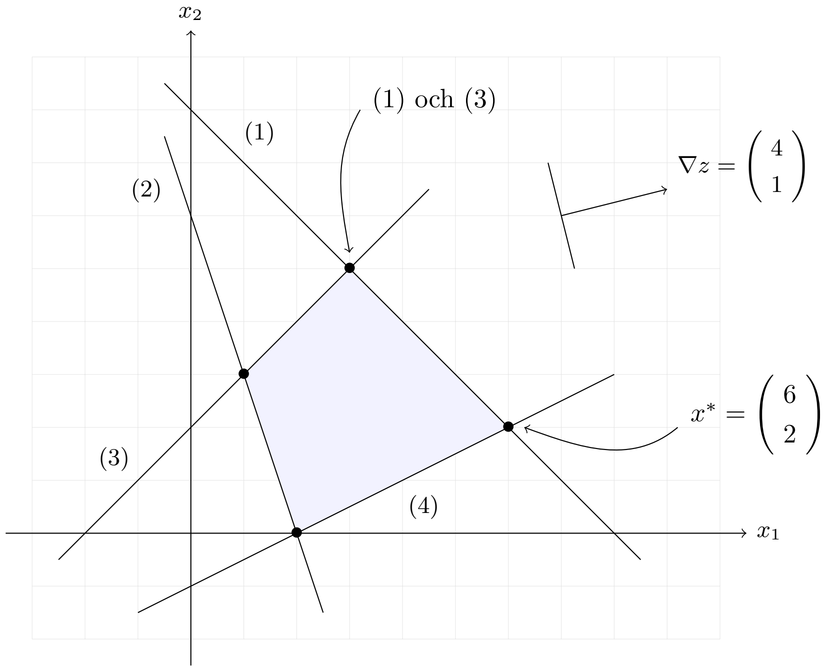
- För x_1 och x_2: $6 \cdot (x_1 + x_2) \leq 120 \cdot 8 \implies x_1 + x_2 \leq 20 \cdot 8 = 160$.
  Då $c_1 = 25 > 22 = c_2$, tillverka endast $x_1 \implies x_1 = 160,\ x_2 = 0$.
- För x_3, x_4 och x_5 : $8 \cdot (x_3 + x_4 + x_5) \leq 2 \cdot 120 \cdot 8 \implies x_3 + x_4 + x_5 \leq 240$.
  Då $c_4 = 15 < 20 = c_3 = c_5$, tillverka så få x_4 som möjligt $\implies x_4 = 10$.
  Tillverka sedan så många x_3 (eller x_5) som möjligt $\implies x_3 = 240 - 10 = 230$.

- En optimistisk skattning ges av $x^*_{\text{OPT}} = (160, 0, 230, 10, 0)^T$
  $$\implies z^*_{\text{OPT}} = 6 \cdot (25 \cdot 160 + 20 \cdot 230 + 15 \cdot 10)$$
  $$6 \cdot (4000 + 4600 + 150) = 6 \cdot 8750 = 52500$$

Alltså, $z^* \leq 52500$.

Uppgift 2.

a) Illustrera problemet grafiskt.



b) Problemet omskrivet på standardform:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcl}
\max & z = & 4x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & & & = & 8 \quad (1) \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & & & - & s_2 & & & & & = & 6 \quad (2) \\
 & & -x_1 & + & x_2 & & & & & + & s_3 & & & = & 2 \quad (3) \\
 & & x_1 & - & 2x_2 & & & & & & & + & s_4 & = & 2 \quad (4) \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & , & s_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Villkor (1) och (3) skärs då $x_1 = 3$ och $x_2 = 5$. Vidare måste $s_1 = s_3 = 0$, och $s_2 = 8$ och $s_4 = 10$. Basvariabler är alltså $x_B = \{x_1, x_2, s_2, s_4\}$ och icke-basvariabler är $x_N = \{s_1, s_3\}$.

d) Det tillåtna området kan beskrivas med hjälp av dess extrempunkter.

$$
x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0
$$

c) Simplextablån för godtycklig bas x_B är uppbyggd på följande sätt,

bas	z	x_B	x_N	$\bar{b}$
z	1	0	$-\bar{c}_N^T$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

där $\bar{c}_N^T = c_N^T - C_B^T B^{-1} N$ är den reducerade kostnaden.

Vi vet att $x_B = \{x_1, x_2, s_2, s_4\}$ och $x_N = \{s_1, s_3\}$ då bivillkor (1) och (3) skärs. Räkna fram alla storheter som behövs.

Ursprungsdata:

$$c_B^T = (4,1,0,0), \quad c_N^T = (0,0) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Data uppdaterad till aktuell bas:

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1}N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

Reducerad kostnad och målfunktionsvärde:

$$\begin{aligned} \bar{c}_N^T &= c_N^T - c_B^T B^{-1} N &&= (0,0) - (4,1,0,0) B^{-1} N &&= (-5/2,\ 3/2) \\ z &= c_B^T B^{-1} b &&= (4,1,0,0)(3,5,8,9)^T &&= 17 \end{aligned}$$

Simplextablån för den givna basen blir enligt nedan, och det krävs en iteration för att hitta optimum. Variabel s_3 blir inkommande och variabel s_4 blir utgående.

bas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}$		
z	1	0	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	17	(0)	
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	3	(1)	ink: s_3
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	5	(2)	utg: s_4
s_2	0	0	0	2	1	-1	0	8	(3)	
s_4	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	9	(4)	
z	1	0	0	3	0	0	1	26	(0)	Optimum:
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	6	(1)	$x^* = (6,2)^{\mathrm{T}}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	2	(2)	$z^* = 26$
s_2	0	0	0	$\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	14	(3)	
s_3	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	6	(4)	

Uppgift 3.

$$
\begin{array}{llrcrcrcc}
(P) & ??\ z = & 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
& \text{då} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & R_1\ b_1 & \mid v_1 \\
& & -3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & R_2\ b_2 & \mid v_2 \\
& & \multicolumn{7}{c}{x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0,}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcrccc}
(D) & ??\ w = & b_1v_1 & + & b_2v_2 & & & \\
& \text{då} & 2v_1 & - & 3v_2 & R_3 & 5 & \mid x_1 \\
& & -v_1 & + & v_2 & R_4 & -2 & \mid x_2 \\
& & v_1 & - & v_2 & R_5 & 3 & \mid x_3 \\
& & \multicolumn{6}{c}{v_1\ ?\ 0,\ v_2\ ?\ 0}
\end{array}
$$

a) Betrakta komplementvillkoren för punkten $x^* = (-1, 1, 0)^T$.

$$
\begin{array}{lcll}
x_1 \cdot (\ 2v_1 - 3v_2 - 5\ ) & = & 0, & x_1 \neq 0 \Rightarrow \quad 2v_1 - 3v_2 = 5 \\
x_2 \cdot (\ -v_1 + v_2 + 2\ ) & = & 0, & x_2 \neq 0 \Rightarrow \quad -v_1 + v_2 = -2 \\
x_3 \cdot (\ v_1 - v_2 - 3\ ) & = & 0, & x_3 = 0 \Rightarrow \quad ?
\end{array}
$$

Notera att relationerna (olikheterna) inte spelar någon roll då komplementvillkoren används. Ekvationssystemet ger att $v_1 = 1$ och $v_2 = -1$, alltså är $v^* = (1, -1)^T$.

b) För att bestämma allt som är obekant nystar vi upp problemet.

- Då v^* är optimal måste den även vara (dualt) tillåten.
  Från tredje duala bivillkoret: $1 - (-1) = 2\ R_5\ 3 \quad \Rightarrow \quad R_5$ är $\leq$
- $x_3 \leq 0$ ej normalform $\Rightarrow$ Tredje duala bivillkoret på ej normalform, och då R_5 är $\leq$, och $\leq$-villkor är ej normalt för min-problem är alltså (D) minimering $\Rightarrow$ (P) maximering.
- $x_1 \leq 0$ ej normalform $\Rightarrow$ Första duala bivillkoret på ej normalform $\Rightarrow$ R_3 är $\leq$
- $x_2 \geq 0$ normalform $\Rightarrow$ Andra duala bivillkoret på normalform $\Rightarrow$ R_4 är $\geq$
- Utnyttja komplementvillkoren

$$
\begin{array}{lcll}
v_1 \cdot (\ 2x_1 - x_2 + x_3 - b_1\ ) & = & 0, & v_1 \neq 0 \Rightarrow b_1 = -3 \\
v_2 \cdot (\ -3x_1 + x_2 - x_3 - b_2\ ) & = & 0, & v_2 \neq 0 \Rightarrow b_2 = 4
\end{array}
$$

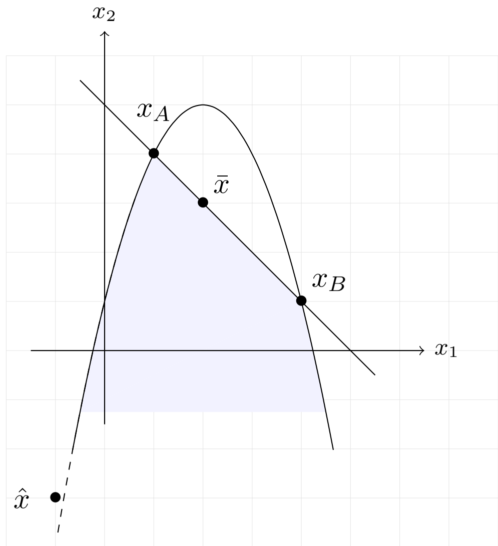
- $v_1 = 1 \geq 0$ normalform $\Rightarrow$ Första primala bivillkoret på normalform $\Rightarrow$ R_1 är $\leq$
- $v_2 = -1 \leq 0$ ej normalform $\Rightarrow$ Andra primala bivillkoret ej normalform $\Rightarrow$ R_2 är $\geq$

Uppgift 4.

Vi börjar med att ta fram gradient och hessian för $f(x)$, samt gradienter för bivillkoren.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \\ x_2 + 3 \end{pmatrix},\ H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

En illustration av problemet.



a) Då vi har ett maximeringsproblem måste $f(x)$ vara *konkav* för att problemet ska vara konvext. Vi ser dock att Hessianen är positivt definit ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$), vilket betyder att $f(x)$ är en strikt konvex funktion och problemet är således inte konvext.

Det tillåtna området är dock konvext.

b) Undersök om punkten $\bar{x} = (2, 3)^T$ är en KKT-punkt, dvs. kontrollera primal tillåtenhet, komplementaritet och dual tillåtenhet.

1. Primala tillåtenhet	2. Komplementaritet
(1): $(2-2)^2 + 3 = 3 < 5$ ok!	Inte aktivt $\Rightarrow v_1 = 0$
(2): $2 + 3 = 5 \leq 5$ ok!	Aktivt $\Rightarrow v_2 = ?$

Vi beräknar $\nabla f(\bar{x})$ och $\nabla g_2(\bar{x})$, och sätter upp den duala tillåtenheten.

Konen: $$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = v_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad v_2 = 6 \geq 0 \text{ ok!} \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ är en KKT punkt.}$$

c) Inga bivillkor aktiva $\Rightarrow$ $v_1 = v_2 = 0$ på grund av komplementaritet.

Konen: $$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \\ x_2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Men $g_1(\hat{x}) = (-1-2)^2 + (-3)^2 = 6 \not\leq 5$, ej primalt tillåten.

Svar: Det finns inga sådana KKT-punkter.

d) Funktionen $f_t(x) = f(x) + tx_1x_2$ har gradient $\nabla f_t(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 + tx_2 \\ x_2 + 3 + tx_1 \end{pmatrix}$.

Båda bivillkoren aktiva $\Rightarrow$ $g_1(x) = 5$ och $g_2(x) = 5$ på grund av komplementaritet.

- Från $g_2(x) = 5$ får vi att $x_2 = 5 - x_1 \Rightarrow g_1(x) = (x_1 - 2)^2 + (5 - x_1) = 5$
- Lös ut x_1: $x_1^2 - 4x_1 + 4 + (5 - x_1) - 5 = 0 \Leftrightarrow$ $$\begin{aligned} x_1^2 - 5x_1 + 4 &= 0 \\ (x_1 - 4)(x_1 - 1) &= 0 \end{aligned}$$
  vilket ger $x_1 = 1$ och $4 \Rightarrow x_2 = 4$ och 1 (eftersom $x_2 = 5 - x_1$).
- Undersök dessa punkter, $x_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $x_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, var för sig:

  <u>x_A ar KKT:</u> $\nabla f_t(x_B) = v_1 \nabla g_1(x_B) + v_2 \nabla g_2(x_B), \quad v_1, \ v_2 \geq 0$

  $$\begin{pmatrix} 4 + 4t \\ 7 + t \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{aligned} -2v_1 + v_2 &= 4 + 4t \\ v_1 + v_2 &= 7 + t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

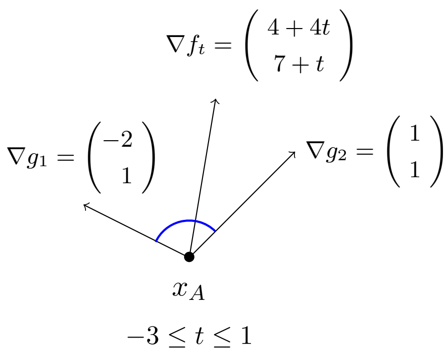
  $-3v_1 = -3 + 3t, \ v_1 = 1 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 1, \quad v_2 = 6 + 2t \geq 0 \Rightarrow t \geq -3$

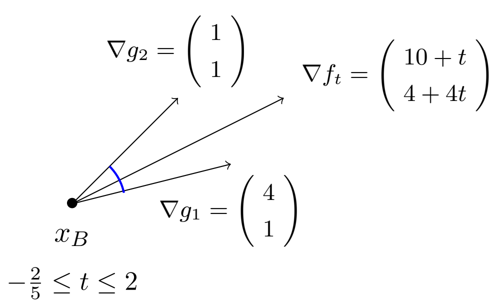
  <u>x_B ar KKT:</u> $\nabla f_t(x_A) = v_1 \nabla g_1(x_A) + v_2 \nabla g_2(x_A), \quad v_1, \ v_2 \geq 0$

  $$\begin{pmatrix} 10 + t \\ 4 + 4t \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{aligned} 4v_1 + v_2 &= 10 + t \\ v_1 + v_2 &= 4 + 4t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

  $3v_1 = 6 - 3t, \ v_1 = 2 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 2, \quad v_2 = 2 + 5t \geq 0 \Rightarrow t \geq -\frac{2}{5}$
- Alltså, punkt x_A är KKT då $-3 \leq t \leq 1$ och punkt x_A är KKT då $-\frac{2}{5} \leq t \leq 2$.

Punkterna KKT samtidigt, välj de tightaste gränserna: $\underline{-\frac{2}{5} \leq t \leq 1}$.





Uppgift 5.

Gott och blandat

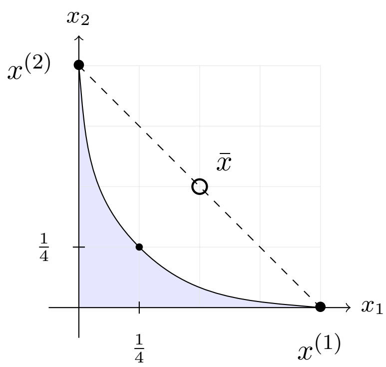
a) C–1, A–2, B–4, D–4. Problem 3 har vi ingen lämplig metod för.

(Det går att argumentera för A–4, eftersom intervallhalvering kan ses som en del av Brantaste lutningsmetoden, för att bestämma steglängden.)

b) Mängden är icke-konvex. Välj t.ex. $x^{(1)} = (1,0)^T$ och $x^{(1)} = (0,1)^T$.

- Då $\sqrt{1} + \sqrt{0} = 1 \leq 1$ och $\sqrt{0} + \sqrt{1} = 1 \leq 1$ så är dessa punkter tillåtna.
- Konvexkombinera, $\bar{x} = \lambda x^{(1)} + (a - \lambda)x^{(2)}$, med t.ex. $\lambda = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow$ $\bar{x} = \frac{1}{2}(1,0)^T + \frac{1}{2}(0,1)^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, och $\sqrt{1/2} + \sqrt{1/2} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2} \nleq 1$.

Vi har visat att $\bar{x} \notin X$, varför mängden måste vara icke-konvex.



c) Tag fram det duala problemet som vanligt.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
(P) & \min & z = c^T x + d^T y & & & & & \\
 & \text{då} & Ax & + & By & = & b & \mid u \\
 & & Ex & + & Fy & \geq & g & \mid v \\
 & & x \geq 0, & y \text{ fri.} & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcrcrl}
(D) & \max & w = b^T u + g^T v & & & & & \\
 & \text{då} & A^T u & + & E^T v & \leq & c & \mid x \\
 & & B^T u & + & F^T v & = & d & \mid y \\
 & & u \text{ fri}, & v \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

d) Sökriktningen är $d_{\text{BL}} = -\nabla f(\bar{x})$. Descent om $\nabla f(\bar{x})^T d_{\text{BL}} < 0$. Eftersom vi antar att $f(\bar{x}) \neq 0$ får vi att $\nabla f(\bar{x})^T d_{\text{BL}} = f(\bar{x})^T(-f(\bar{x})) = -f(\bar{x})^T f(\bar{x}) = -\underbrace{||f(\bar{x})||_2^2}_{>0} < 0.$