Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	30:e maj 2018
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3 – 5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh
Jourhavande lärare:	Nils-Hassan Quttineh 013-28 21 85

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

En pizzabagare har som affärsidé att sälja pizzabitar under lunchen. Pizzabagaren erbjuder 5 olika pizzasorter, och givetvis tillagar man hela pizzor vilka sedan skärs upp i 6 bitar per pizza och dessa säljs styckvis.

Försäljningen av pizzabitar sker endast under en begränsad tid, det är under lunchtimmarna 11.30–13.30, och då man vill servera bitarna rykande färska så måste de gräddas mellan 11.20–13.20. Priset för en pizzabit av respektive sort är 25, 22, 20, 15 och 20 kr. Efterfrågan är så stor att det går att anta att allt som tillverkas kan säljas. Sort 4 är otroligt populär, kanske beroende på det låga försäljningspriset, och det måste därför tillverkas åtminstone 60 sådana bitar.

Vid tillverkningen av de olika sorterna används ett flertal olika råvaror, och förutom vissa standardingredienser (som det finns obegränsade mängder av) används även mer exklusiva råvaror, betecknade råvara 1, 2 och 3, med begränsad tillgång. Hur mycket som går åt av dessa exklusiva råvaror, samt hur stor tillgången är för var och en av dem, framgår av tabellen nedan.

Tabell 1: Antal enheter av respektive exklusiv råvara som går åt vid tillagningen av en hel pizza av respektive sort, samt hur många enheter som finns att tillgå av respektive råvara. Ett streck (–) betyder att råvaran inte används.

	Åtgång per pizzasort					
Råvara	1	2	3	4	5	Tillgång
1	1	5	–	3	2	400
2	–	2	5	1	–	130
3	5	3	–	–	4	300

Beroende på vilken pizzasort det är så ska pizzan antingen gräddas i den vedeldade ugnen (sort 1 och 2) eller i någon av de två vanliga pizzaugnarna (sort 3, 4 och 5) som finns i restaurangens kök. Vedeldade pizzor gräddas i 6 minuter, övriga pizzor gräddas i 8 minuter. Det får plats som mest 8 stycken pizzor samtidigt i varje ugn.

Pizzabagaren vill nu bestämma hur många pizzor av varje sort som man bör tillverka under lunchen för att maximera sina inkomster.

a) Formulera en linjär optimeringsmodell för pizzabagarens problem. **(3p)**

b) Härled en optimistisk skattning genom att:

- relaxera alla bivillkor som har med de exklusiva råvarorna att göra.
- beräkna den optimistiska skattningen genom att lösa det återstående optimeringsproblemet till optimalitet!

Det erhållna optimeringsproblemet får lösas genom inspektion, men redovisa tydligt lösningsgången och de beräkningar som görs. **(1p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & 4x_1 & + & x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & (1) \\
& & 3x_1 & + & x_2 & \geq & 6 & (2) \\
& & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & (3) \\
& & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 & (4) \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Illustrera problemet grafiskt, markera tydligt det tillåtna området. Gör en stor och tydlig bild och var noggrann, samtliga efterföljande deluppgifter utgår från denna bild! **(1p)**

b) Skriv ned problemet på standardform och betrakta sedan skärningen mellan bivillkor (1) och (3). Ange vilka variabler som är bas respektive icke-bas i denna baslösning. Motivera ditt svar utifrån figuren, det ger inga poäng att lösa uppgiften med simplexmetoden. **(1p)**

c) Betrakta skärningen mellan bivillkor (1) och (3) igen. Använd kunskapen från deluppgift **b)** om vilka variabler som är bas samt icke-bas i denna baslösning och teckna motsvarande simplextablå. Använd sedan simplexmetoden för att bestämma problemets optimallösning!

Tips. Om basvariablerna väljs i den naturliga ordningen blir

$$
B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.
$$

(2p)

d) Beskriv alla tillåtna lösningar till problemet ovan som en konvexkombination av det tillåtna områdets extrempunkter. **(1p)**

Uppgift 3.

Betrakta ett linjärt optimeringsproblem med målfunktionen $z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ och ett tillåtet område som definieras av bivillkoren

$$
\begin{array}{rcrcrcc}
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & R_1 & b_1 \\
-3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & R_2 & b_2 \\
\multicolumn{7}{c}{x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0,}
\end{array}
$$

där b_1 och b_2 är reella tal och R_1 samt R_2 står för $\leq$ eller $\geq$.

Antag att punkten $x^* = (-1, 1, 0)^T$ är optimal.

a) Bestäm motsvarande komplementära duallösning. **(1p)**

b) Avgör om problemet är av typen minimering eller maximering, bestäm värden på b_1 och b_2, samt bestäm relationerna R_1 och R_2.

Obs! Uppgiften ska <u>inte</u> lösas genom att testa samtliga kombinationer av problemtyp och möjliga relationer för R_1 och R_2. **(2p)**

Uppgift 4.

Studera följande icke-linjära problem.

$$
\begin{array}{llcll}
\max & f(x) & = & x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 & \\
\text{då} & g_1(x) & = & (x_1 - 2)^2 + x_2 \leq 5 & (1) \\
 & g_2(x) & = & x_1 + x_2 \leq 5 & (2)
\end{array}
$$

a) Avgör om problemet är konvext eller inte. **(1p)**

b) Undersök om punkten $\bar{x} = (2, 3)^T$ uppfyller KKT-villkoren. **(1p)**

c) Finns det någon KKT-punkt där inga bivillkor är aktiva? **(1p)**

d) Låt $f_t(x) = f(x) + tx_1x_2$. Betrakta samtliga punkter där båda bivillkoren är aktiva. För vilka värden på $t \in \mathbb{R}$ uppfyller dessa punkter KKT-villkoren samtidigt? **(2p)**

Uppgift 5.

Lite gott och blandat, uppgifterna är helt fristående. Motivera svaren noggrant!

a) Betrakta följande listor med optimeringsmetoder och optimeringsproblem.

A. Intervallhalvering

B. Newtons metod

C. Simplexmetoden

D. Brantaste lutning

1. $$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{ll} \min & f(t) = t^3 - 2t^2 + e^t - 1 \\ \text{då} & 0 \leq t \leq 6 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

4. $$\begin{array}{ll} \min & f(x) = x_1^4 + 2x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2 \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Uppgiften går ut på att para ihop vilken metod som bör användas för att lösa respektive problem. Flera metoder kan kopplas till samma problem, och vice versa. Alla metoder kanske inte ska användas, likaså finns det kanske inte någon lämplig metod för alla problem. Svara genom att ange en lista av par med metod och problem, t.ex. A–1, C–2, osv. **(1p)**

b) Visa eller motbevisa att mängden

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0 \text{ och } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 1\}$$

är konvex. **(1p)**

c) Studera följande LP-problem:

$$\begin{array}{llcll} \min & z = c^T x + d^T y & & & \\ \text{då} & Ax + By & = & b & (1) \\ & Ex + Fy & \geq & g & (2) \\ & x \geq 0, \ y \text{ fri.} & & & \end{array}$$

Låt u vara dualvariabler till bivillkoren (1), och v vara dualvariabler till bivillkoren (2). Teckna det duala problemet. **(1p)**

d) Antag att vi vill minimera en godtycklig funktion $f(x)$. Givet en punkt $\bar{x}$, där $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, visa att sökriktningen enligt Brantaste lutningsmetoden ger en descentriktning. **(1p)**