Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 25:e oktober 2017

Uppgift 1.

a) Variabeldefinition:

a_j = koefficient a_j, $j = 1, 2$, i de båda linjerna (eftersom de är parallella)

b_k = högerledskoefficeinterna i de båda linjerna, $k = 1, 2$.

Målfunktion:

$$\max \quad z = b_2 - b_1$$

Bivillkor:

$$\begin{array}{rcrcll} \bar{x}_i a_1 & + & \bar{y}_i a_2 & \leq & b_1 & i \in I_1 \\ \bar{x}_i a_1 & + & \bar{y}_i a_2 & \geq & b_2 & i \in I_2 \\ a_1 & + & a_2 & = & 1 & \\ a_1 & , & a_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

b) Variabeldefinition:

x = x-koordinaten för cirkelns mittpunkt

y = y-koordinaten för cirkelns mittpunkt

r = cirkelns radie

Målfunktion:

$$\min \quad r$$

Bivillkor:

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \leq r^2 \qquad i \in I_3$$

Uppgift 2.

a) Problemet omskrivet på standardform ger följande simplextablåer:

bas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$		
z	1	2	-4	0	0	0	(0)	
s_1	0	1	1	1	0	5	(1)	ink: x_2
s_2	0	-2	$\boxed{1}$	0	1	2	(2)	utg: s_2
z	1	-6	0	0	4	8	(0)	
s_1	0	$\boxed{3}$	0	1	-1	3	(1)	ink: x_1
x_2	0	-2	1	0	1	2	(2)	utg: s_1
z	1	0	0	2	2	14	(0)	Optimum:
x_1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	(1)	$x^* = (1,4)^{\mathrm{T}}$
x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	4	(2)	$z^* = 18$

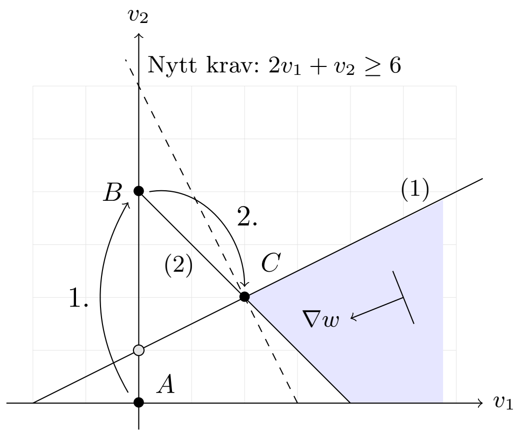
Sekvensen av baslösningar: $(0,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,2)^{\mathrm{T}}$, $(1,4)^{\mathrm{T}}$.

(Från tablån kan vi se motsvarande duallösningar: $(0,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,4)^{\mathrm{T}}$, $(2,2)^{\mathrm{T}}$.)

b) Det duala problemet blir

$$
\begin{array}{llrcrl}
\max & w = & 5v_1 + 2v_2 & & & \\
\text{då} & & v_1 - 2v_2 & \geq & -2 & (1) \\
 & & v_1 + v_2 & \geq & 4 & (2) \\
 & & v_1 \;,\; v_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Illustration av det duala problemet.



Vi ser att $v* = (2,2)^{\mathrm{T}}$ och $w^* = 14$.

c) Komplementvillkoren:

$$
\begin{aligned}
(x_1 + x_2 - 5) \cdot v_1 &= 0 \\
(-2x_1 + x_2 - 2) \cdot v_2 &= 0 \\
(v_1 - 2v_2 + 2) \cdot x_1 &= 0 \\
(v_1 + v_2 - 4) \cdot x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$(0,0)^{\mathrm{T}}$: Komplementvillkoren ger direkt att $v_1 = v_2 = 0$.

$(0,2)^{\mathrm{T}}$: Komplementvillkoren ger att $v_1 = 0$ och att $v_1 + v_2 = 4$, dvs. att $v_2 = 4$.

$(1,4)^{\mathrm{T}}$: Då $x_1 > 0$, och $x_2 > 0$ måste $v_1 - 2v_2 = -2$ och $v_1 + v_2 = 4 \Rightarrow v_1 = v_2 = 2$.

Sekvens av duallösningar: A: $(0,0)^{\mathrm{T}}$, B: $(0,4)^{\mathrm{T}}$, C: $(2,2)^{\mathrm{T}}$, se bilden i b).

(Notera förflyttningen mellan icke-närliggande baslösningar i det duala rummet.)

d) Nytt bivillkor i dualen svarar mot en ny variabel i primalen. För att optimallösningen $x^* = (1,4)^{\mathrm{T}}$, med motsvarande duallösning $v^* = (2,2)^{\mathrm{T}}$, ska vara fortsatt optimal krävs att $2v_1 + v_2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6 \geq c_3$.

Alternativt: $\bar{c}_3 = c_3 - (v^*)^{\mathrm{T}} a_3 = c_3 - (2,2) \cdot (2,1)^{\mathrm{T}} = c_3 - 6 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 \leq 6$.

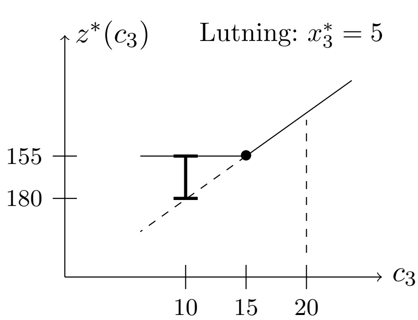
Uppgift 3.

a) För att bevara primal tillåtenhet krävs att $x_B = B^{-1}b \geq 0$. Från den givna optimaltablån hittar vi B^{-1}, och ansätter $b = (49, b_2, 5)^T$.

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 \\ b_2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 49 - 3b_2 - 10 \\ b_2 - 5 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 5 \leq b_2 \leq 13$$

b) Beräkna reducerad kostnad: $\bar{c}_N^{\mathrm{T}} = c_N^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N \leq 0$ (optimalitetskrav för maxprobem). Från optimaltablån ser vi att basen är $\{x_3, s_1, x_1\}$, i den ordningen, vilket ger $c_N^{\mathrm{T}} = (12, 0, 0)$, $c_B^{\mathrm{T}} = (c_3, 0, 15)$, och $B^{-1}N$ finns i optimaltablån under ickebasvariablerna. Vi får

$$\begin{aligned} \bar{c}_N^{\mathrm{T}} &= (12, 0, 0) - (c_3, 0, 15) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (12,\ 0,\ 0) - (15,\ 15,\ c_3 - 15) \\ &= (-3,\ -15,\ 15 - c_3) \ \leq\ 0 \end{aligned}$$



vilket ger kravet $c_3 \geq 15$.

Alltså är aktuell baslösning optimal då $c_3 \geq 15$.

Vi noterar att $x_3^* = 5$. En ändring av c_3 från 20 ner till 10 går alltså utanför intervallet, och att minska c_3 leder till en minskning av z^*. Att stå kvar i samma baslösning är tillåtet, men antagligen inte fördelaktigt utanför intervallet. Vi får följande förändring (minskning) av vinsten.

Best Case:	$(20 - 15) \cdot x_3^*$	$= 5 \cdot 5$	$= 25$	$\Rightarrow$	ny vinst:	205 - 25 = 180
Worst Case:	$(20 - 10) \cdot x_3^*$	$= 10 \cdot 5$	$= 50$	$\Rightarrow$	ny vinst:	205 - 50 = 155

c) Med $c_3 = 10$ blir $\bar{c}_N^{\mathrm{T}} = (-3, -15, +5)$, dvs. s_3 har positiv reducerad kostnad! Målfunktionsvärdet i aktuell baslösning ändras till $z = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b = (10, 0, 15)(5, 3, 7)^T \ = \ 155$.

bas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$		
z	1	0	3	0	0	15	-5	155	(0)	
x_3	0	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	5	(1)	ink: s_3
s_1	0	0	-1	0	1	-3	-2	3	(2)	utg: x_3
x_1	0	1	1	0	0	1	-1	7	(3)	
z	1	0	3	5	0	15	0	180	(0)	
s_3	0	0	0	1	0	0	1	5	(1)	Optimum:
s_1	0	0	-1	2	1	-3	0	13	(2)	$x^* = (12, 0, 0)^{\mathrm{T}}$
x_1	0	1	1	1	0	1	0	12	(3)	$z^* = 180$

Efter en pivotering hittar vi nytt optimum, och det stämmer bra mot skattningen i deluppgift b). Den nya vinsten hamnar inom det uppskattade intervallet.

Uppgift 4.

Vi börjar med att ta fram alla gradienter.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-2)^3 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 - 4 \end{pmatrix},\ \nabla g_1(x) = ?,\ \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2(x_2-2) \end{pmatrix},\ \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Teckna KKT-villkoren, dvs. primal tillåtenhet, komplementaritet och dual tillåtenhet.

1. Primala tillåtenhet

$$\begin{aligned} g_1(x) &= ? && \leq b \\ g_2(x) &= (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 && \geq 1 \\ g_3(x) &= 2x_1 - x_2 && \leq 5 \end{aligned}$$

2. Komplementaritet

$$\begin{aligned} v_1 \cdot (\ g_1(x) - b\ ) &= 0 \\ v_2 \cdot (\ g_2(x) - 1\ ) &= 0 \\ v_3 \cdot (\ g_3(x) - 5\ ) &= 0 \end{aligned}$$

3. Dual tillåtenhet

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= v_1 \cdot \nabla g_1(x) + v_2 \cdot \nabla g_2(x) + v_3 \cdot \nabla g_3(x) \\ & \quad v_1 \geq 0,\ v_2 \leq 0,\ v_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Undersök om punkten $\bar{x} = (2,2)^{\mathrm{T}}$ uppfyllet KKT-villkoren.

1. Primala tillåtenhet							2. Komplementaritet		
(1):	$g(\bar{x})$	$=$	b	$\leq$	b	ok!	Aktivt	$\Rightarrow$	$v_1 = ?$
(2):	$(2-3)^2 + (2-2)^2$	$=$	1	$\geq$	1	ok!	Aktivt	$\Rightarrow$	$v_2 = ?$
(3):	$2 \cdot 2 - 2$	$=$	0	$\leq$	5	ok!	Inte aktivt	$\Rightarrow$	$v_3 = 0$

Vi beräknar $\nabla f(\bar{x})$, $\nabla g_i(\bar{x})$, $i = 1, 2$, och sätter upp den duala tillåtenheten.

Konen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Från andra raden kan vi utläsa att $v_1 = 6$, vilket ger att $v_2 = 2$. Detta bryter dock mot kravet att $v_2 \leq 0$, alltså är $\bar{x}$ <u>inte</u> en KKT punkt.

c) Undersök om punkten $\hat{x} = (3,1)^{\mathrm{T}}$ uppfyllet KKT-villkoren.

1. Primala tillåtenhet							2. Komplementaritet		
(1):	$g(\hat{x})$	$=$	$?$	$<$	b	ok!	Inte aktivt	$\Rightarrow$	$v_1 = 0$
(2):	$(3-3)^2 + (1-2)^2$	$=$	1	$\geq$	1	ok!	Aktivt	$\Rightarrow$	$v_2 = ?$
(3):	$2 \cdot 3 - 1$	$=$	5	$\leq$	5	ok!	Aktivt	$\Rightarrow$	$v_3 = ?$

Vi beräknar $\nabla f(\hat{x})$, $\nabla g_i(\hat{x})$, $i = 2, 3$, och sätter upp den duala tillåtenheten.

Konen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Från första raden kan vi utläsa att $v_3 = \frac{3}{2}$, vilket ger att $v_2 = -\frac{9}{4}$. Alla teckenkrav är uppfyllda, alltså är $\hat{x}$ en KKT punkt.

Svar: Punkten $\tilde{x}$ uppfyller alla KKT-villkor med $v = (0, -\frac{9}{4}, \frac{3}{2})^{\mathrm{T}}$.

d) Visa eller motbevisa att den tillåtna mängden är konvex.

Det tillåtna området inte är en konvex mängd. Återstår alltså bara att göra ett matematiskt motexempel. Välj t.ex. $x^{(1)} = (2,2)^T$ och $x^{(2)} = (3,1)^T$. Dessa punkter är tillåtna, dvs. uppfyller alla bivillkor.

Villkor	Punkten $x^{(1)}$	Punkten $x^{(2)}$
(1)	$g_1(x^{(1)}) = b \leq b$ ok!	$g_1(x^{(2)}) < b \leq b$ ok!
(2)	$(-1)^2 + (0)^2 = 1 \geq 1$ ok!	$(0)^2 + (-1)^2 = 1 \geq 1$ ok!
(3)	$2 \cdot 2 - 2 = 2 \leq 5$ ok!	$2 \cdot 3 - 1 = 5 \leq 5$ ok!

Vi bildar nu $\tilde{x}$, en linjärkombination av dessa: $\tilde{x} = \lambda \cdot (2,2)^T + (1-\lambda) \cdot (3,1)^T$

Välj t.ex. $\lambda = \frac{1}{2}$ och vi får $\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot (2,2)^T + \frac{1}{2} \cdot (3,1)^T = (2.5, 1.5)^T$ $[\ 0 < \lambda < 1\ ]$

Denna punkt bryter nu mot villkor (2): $(2.5-3)^2 + (1.5-2)^2 = 0.5 \ngeq 1$. Vi har nu visat matematiskt att det tillåtna området <u>inte</u> är en konvex mängd.

Uppgift 5.

Gott och blandat

a) För att avgöra om problemet är konvext undersöker vi målfunktionen och varje bivillkor. Om $f(x)$ är konvex och samtliga bivillkor ger upphov till en konvex mängd, då är det tillåtna området konvext och vi har ett konvext problem.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix}, \; H(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 1 > 0 \\ \Delta_2 = 2 - 1 = 1 > 0 \end{array}$$

Hessianen är positivt definit, alltså är målfunktionen en strikt konvex funktion.

Vänsterledet (VL) i bivillkor (1), $g_1(x) = (x_1 - 3)^2 - x_2 = x_1^2 - 6x_1 + 9 - x_2$, är en konvex funktion. Eftersom det är ett $\leq -$ villkor ger bivillkoret upphov till en konvex mängd. Vi skriver om bivillkor (2) till ett $\leq -$ villkor, $g_2(x) = -x_1 + x_2^2 \leq -1$, och ser då att VL än en gång är en konvex funktion. Bivillkor (3) är ett linjärt bivillkor, alltså konvext. Allt som allt så har vi ett konvext problem.

b) Två iterationer med BL, startpunkt $\bar{x} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$, där $d_{BL} = -\nabla f(x)$ ty minimeringsproblem.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

Iteration 1:
Sökriktning $d = (1, 0)^T$ och steglängd 0.5, vilket ger ny punkt $x^{(1)} = (1.5, 1)^T$.

Iteration 2:
Sökriktning $d = (0, 1)^T$ och steglängd 0.25, vilket ger ny punkt $x^{(2)} = (1.5, 1.25)^T$.
Punkten $x^{(2)}$ är <u>inte</u> optimal ty $\nabla f(x^{(2)}) = (-0.5, 0)^{\mathrm{T}} \neq 0$.

c) Bestäm sökriktningen $d_{NM} = -H(x)^{-1}\nabla f(x)$ för funktionen $f(x) = x_1^2 x_2$, undersök sedan när $\nabla f(x)^{\mathrm{T}} d_{NM} < 0$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(x)^{-1} = -\frac{1}{4x_1^2}\begin{pmatrix} 0 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Vi får att $d_{NM} = \frac{1}{4x_1^2}\begin{pmatrix} 0 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \ldots = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, och

vidare att $\nabla f(x)^{\mathrm{T}} d_{NM} = -\frac{1}{2}(2x_1x_2, x_1^2)(x_1, x_2) = -\frac{3}{2}x_1^2x_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x_1^2x_2}_{= f(x)} > 0.$

Svaret blir alltså $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) > 0\}$.

d) Vi har $f(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + 2t^2 - 8t + 3$ vilket ger $f'(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 8$.

Vi ser också att $f(t)$ är konvex, eftersom $f''(t) = 3t^2 - 6t + 4 = 3(t-1)^2 + 1 > 0$.

Börja med att bekräfta att intervallets ändpunkter ger oss olika tecken på derivatan.

$$f'(0) = -8 < 0, \quad f'(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 8 = -4 < 0$$

Vi ser att derivatan har samma tecken i intervallets ändpunkter, och eftersom vi vet att $f(t)$ är en konvex funktion medför det att t^* <u>inte</u> kan finnas inom intervallet $[0, 2]$.