Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	25:e oktober 2017
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3 – 5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh / Oleg Burdakov
Jourhavande lärare:	Oleg Burdakov 013-28 14 73

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

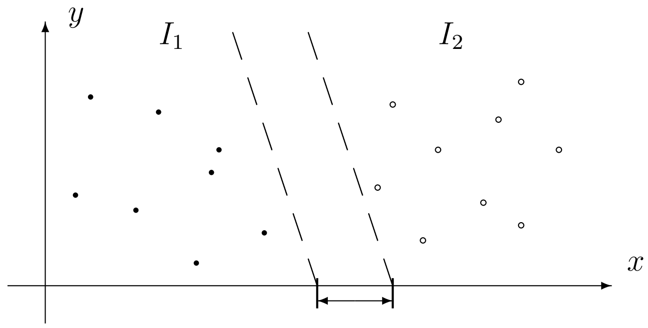
Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Två fristående problem att modellera denna gång, dock på samma tema.

a) Givet ett antal punkter med givna koordinater $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ som är uppdelade i två mängder I_1 och I_2, se bilden nedan för ett exempel, bestäm två parallella linjer som:

1. har formen $a_1 x + a_2 y = b$, där $a_1, a_2 \geq 0$ och $a_1 + a_2 = 1$.
2. delar av xy-planet så att de två mängderna är skilda åt.
3. befinner sig på så stort avstånd från varandra som möjligt.

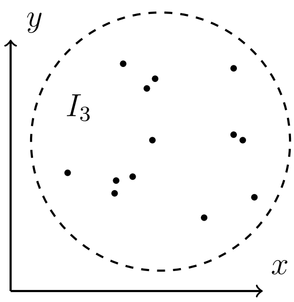


De två linjerna kommer att ha olika värden på b och avståndet mellan linjerna defineras som skillnaden mellan det största och det minsta av dessa värden.

Skriv ner tydliga variabeldefinitioner och ge en linjär optimeringsmodell som löser detta problem. **(2p)**

b) Givet en mängd av punkter $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, där $i \in I_3$, bestäm en cirkel som:

1. innesluter samtliga punkter i mängden.
2. har en så liten radie som möjligt.



Skriv ner tydliga variabeldefinitioner och ge en optimeringsmodell som löser detta problem. **(2p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande linjära optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & -2x_1 & + & 4x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (1) \\
& & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & (2) \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Bestäm problemets optimallösning med hjälp av simplexmetoden, och ange den sekvens av tillåtna baslösningar som erhålls. **(1p)**

b) Teckna det duala problemet och illustrera det grafiskt. **(1p)**

c) För den sekvens av baslösningar som erhölls i primalen, bestäm motsvarande duala baslösningar genom att använd komplementvillkoren.

Illustrera även grafiskt hur man rör sig mellan dessa baslösningar i dualen. **(2p)**

d) Antag att man lägger till ett krav på dual-variablerna, att $2v_1 + v_2 \geq c_3$.

- Vad svarar detta krav mot i det primala problemet?
- Vilket krav får man på c_3 för att optimalitetsvillkoren för LP-problem fortfarande ska vara uppfyllda i den nuvarande optimallösningen? **(1p)**

Uppgift 3.

Betrakta optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & z & = & 15x_1 & + & 12x_2 & + & 20x_3 & & \\
\text{då} & & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 49 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 12 \\
 & & & & & & & x_3 & \leq & 5 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

som med slackvariablerna s_1, s_2 och s_3 har följande optimaltablå.

bas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	0	3	0	0	15	5	205
x_3	0	0	0	1	0	0	1	5
s_1	0	0	-1	0	1	-3	-2	3
x_1	0	1	1	0	0	1	-1	7

a) Bestäm intervallet för högerledet b_2 inom vilket den aktuella baslösningen är fortsatt optimal. **(1p)**

b) Bestäm intervallet för målfunktionskoefficienten c_3 inom vilket den aktuella baslösningen är fortsatt optimal. Vad kan man förutsäga om det optimala målfunktionsvärdet då värdet på c_3 ändras till 10? **(2p)**

c) Lös problemet för $c_3 = 10$ utgående från den givna optimaltablån. Stämmer det optimala målfunktionsvärdet med förutsägelsen? **(1p)**

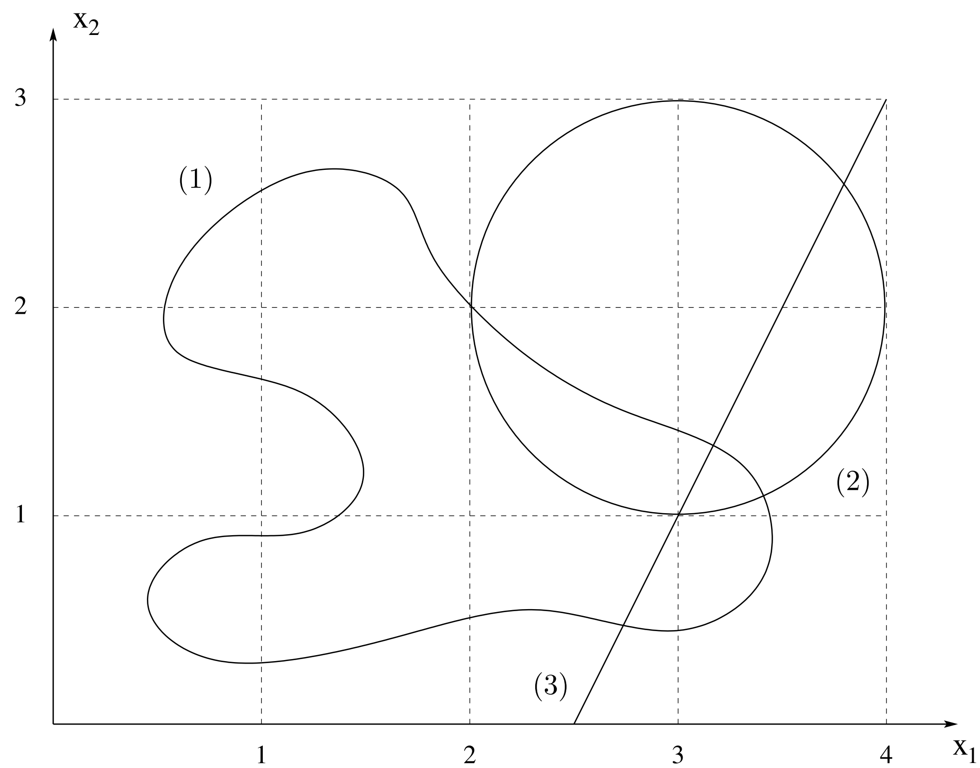
Uppgift 4.

Studera följande problem, vars tillåtna område illustreras i figuren nedan.

$$
\begin{array}{llcll}
\max & f(x) & = & \frac{1}{2}(x_1-2)^4 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2 & \\
\text{då} & g_1(x) & \leq & b & (1) \\
& g_2(x) & = & (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 \quad \geq \; 1 & (2) \\
& g_3(x) & = & 2x_1 - x_2 \quad \leq \; 5 & (3)
\end{array}
$$

Det exakta utseendet på funktionen $g_1(x)$ är okänt, men vi har följande information:

- För punkten $\bar{x} = (2,2)^{\mathrm{T}}$ gäller att $g_1(\bar{x}) = b$ och $\nabla g_1(\bar{x}) = (1,1)^{\mathrm{T}}$.
- För punkten $\hat{x} = (3,1)^{\mathrm{T}}$ gäller att $g_1(\hat{x}) < b$ och $\nabla g_1(\hat{x}) = (2,1)^{\mathrm{T}}$.



a) Teckna KKT-villkoren för problemet. **(1p)**

b) Avgör algebraiskt om punkten $\bar{x} = (2,2)^{\mathrm{T}}$ uppfyller KKT-villkoren. **(1p)**

c) Givet informationen ovan, går det att avgöra om punkten $\hat{x} = (3,1)^{\mathrm{T}}$ uppfyller KKT-villkoren? Om ja, avgör om $\hat{x}$ uppfyller KKT-villkoren, om nej, motivera vilken information som saknas. **(1p)**

d) Är problemet konvext? Visa eller motbevisa matematiskt. **(1p)**

Uppgift 5.

Lite gott och blandat, uppgifterna är helt fristående. Motivera svaren noggrant!

a) Är följande problem konvext? Visa eller motbevisa matematiskt.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\min & f(x) = & \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 & & & & & \\
\text{då} & & (x_1-3)^2 & - & x_2 & \leq & 2 & (1) \\
 & & x_1 & - & x_2^2 & \geq & 1 & (2) \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 & (3)
\end{array}
$$

(1p)

b) Betrakta problemet att minimera $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - 2x_2$ med startpunkt $\bar{x} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$. Utför två iterationer med Brantaste lutningsmetoden. **(1p)**

c) Betrakta funktionen $f(x) = x_1^2 x_2$. För vilka punkter $x \in \mathbb{R}^2$ blir sökriktningen i Newtons metod en descentriktning? **(1p)**

d) Antag att man använder en sökmetod för obegränsad optimering, till exempel Newtons modifierade metod, och önskar minimera en icke-linjär funktion. Givet en punkt och en sökriktning vill man nu bestämma den optimala steglängden t längs den givna sökriktningen med hjälp av intervallhalvering.

Om $f(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + 2t^2 - 8t + 3$, är det då sant att $t^* \in [0, 2]$? **(1p)**