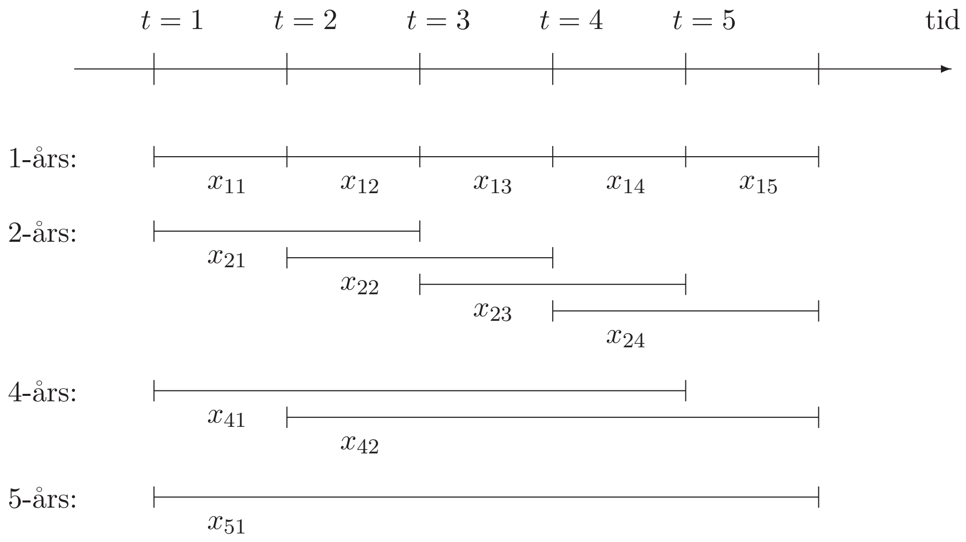
Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 15:e augusti 2017

Uppgift 1.

a) Variabeldefinition:
x_{it} = antal tkr som investeras i början av år t i investeringsalternativ i



Målfunktion:

$$\max\ z \quad = \quad 1.05x_{15} + 1.14x_{24} + 1.22x_{42} + 1.08x_{51}$$

Bivillkor:

$$\begin{array}{lcll}
x_{11} + x_{21} + x_{41} + x_{51} & = & 300 & [t=1] \\
x_{12} + x_{22} + x_{42} & = & 1.05x_{11} & [t=2] \\
x_{13} + x_{23} & = & 1.05x_{12} + 1.14x_{21} & [t=3] \\
x_{14} + x_{24} & = & 1.05x_{13} + 1.14x_{22} & [t=4] \\
x_{15} & = & 1.05x_{14} + 1.14x_{23} + 1.22x_{41} & [t=5] \\
3 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{41} + 1 \cdot x_{51} & \leq & 3.7 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{41} + x_{51}) & [t=1] \\
3 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{22} + 4 \cdot x_{42} & \leq & 3.7 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{42}) & [t=2] \\
3 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{23} & \leq & 3.7 \cdot (x_{13} + x_{23}) & [t=3] \\
3 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{24} & \leq & 3.7 \cdot (x_{14} + x_{24}) & [t=4] \\
3 \cdot x_{15} & \leq & 3.7 \cdot x_{15} & [t=5] \\
x_{it} & \geq & 0\ ,\ i = 1, 2, 4, 5,\ t = 1, \ldots, 5 &
\end{array}$$

Målfunktionen är att maximera tillgångarna vid slutet av planeringshorisonten, det vill säga variablerna som svarar mot investeringar som avslutas efter år 5.

De första fem bivillkoren tar hand om att alla pengar hela tiden måste investeras, och resterande bivillkor ser till att medelrisken för investerat kapital i varje tidssteg inte överstiger 3,7. Sista bivillkoret (riskfaktor, $t = 5$) är redundant.

b) Ny variabel s_t = antal tkr som går till transaktionsavgift år t.

Nya bivillkor:

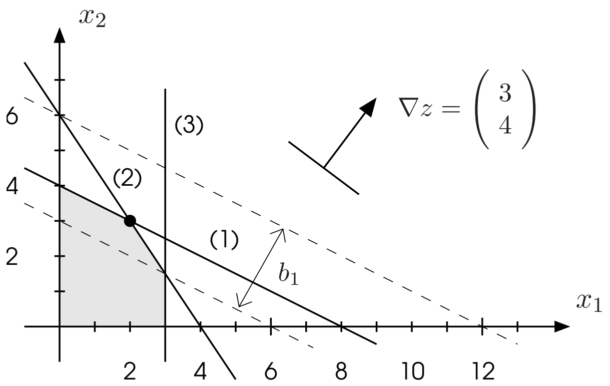
$$
\begin{array}{rcll}
s_1 & = & 0.01 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{41} + x_{51}) & [t = 1] \\
s_2 & = & 0.01 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{42}) & [t = 2] \\
s_3 & = & 0.01 \cdot (x_{13} + x_{23}) & [t = 3] \\
s_4 & = & 0.01 \cdot (x_{14} + x_{24}) & [t = 4] \\
s_5 & = & 0.01 \cdot x_{15} & [t = 5] \\
s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 & \leq & 7 & [\text{total}] \\
s_t & \geq & 0\ ,\ t = 1, \ldots, 5 &
\end{array}
$$

Modifierade bivillkor:

$$
\begin{array}{lcll}
s_1 + x_{11} + x_{21} + x_{41} + x_{51} & = & 300 & [t = 1] \\
s_2 + x_{12} + x_{22} + x_{42} & = & 1.05x_{11} & [t = 2] \\
s_3 + x_{13} + x_{23} & = & 1.05x_{12} + 1.14x_{21} & [t = 3] \\
s_4 + x_{14} + x_{24} & = & 1.05x_{13} + 1.14x_{22} & [t = 4] \\
s_5 + x_{15} & = & 1.05x_{14} + 1.14x_{23} + 1.22x_{41} & [t = 5]
\end{array}
$$

Uppgift 2.

Om det går (2 variabler), börja gärna alltid med att rita en bild av problemet.



a) Med $c_1 = 3$ och $c_2 = 4$ får vi följande simplextablåer:

bas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$		
z	1	-3	-4	0	0	0	0	(0)	
s_1	0	1	$\boxed{2}$	1	0	0	8	(1)	ink: x_2
s_2	0	3	2	0	1	0	12	(2)	utg: s_1
s_3	0	1	0	0	0	1	3	(3)	
z	1	-1	0	2	0	0	16	(0)	
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	4	(1)	ink: x_1
s_2	0	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	4	(2)	utg: s_2
s_3	0	1	0	0	0	1	3	(3)	
z	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	18	(0)	
x_2	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	3	(1)	Optimum:
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	(2)	$x^* = (2,3)^{\mathrm{T}}$
s_3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	(3)	$z^* = 18$

b) Aktuell baslösning: $x_B = \{x_2, x_1, s_3\}$, vilket ger oss $c_B^{\mathrm{T}} = (4, 3, 0)$. Vi tar B^{-1} från optimaltablån och kan nu beräkna

$$v^{\mathrm{T}} \;=\; c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} \;=\; (4,3,0)\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \;=\; (\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)$$

vilket stämmer bra mot vad som står i optimaltablån under slackvariablerna.

c) Vi vill alltså beräkna $B^{-1}b \geq 0$ för ett obekant b_1.

$$B^{-1}b \;=\; \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{3}{4}b_1 - 3 \\ -\frac{1}{2}b_1 + 6 \\ \frac{1}{2}b_1 - 3 \end{pmatrix} \;\geq\; 0$$

vilket ger tre olikheter som resulterar i $6 \leq b_1 \leq 12$. Detta stämmer bra med det vi ser i bilden ovan.

d) Beräkna reducerade kostnader för alla möjliga kombinationer av c_1 och c_2, med kravet att aktuell baslösning förblir optimal. Vi vill alltså beräkna $\bar{c}_N^{\mathrm{T}} = c_N^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N \leq 0$ då vi har ett max-problem.

Icke-basvariabler är $x_N = \{s_1, s_2\}$, vilket ger oss $c_N^{\mathrm{T}} = (0, 0)$. Vi tar $B^{-1}N$ från optimaltablån och kan nu beräkna

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_N^{\mathrm{T}} &= c_N^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N \;=\; (0,0) - (c_2, c_1, 0) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= (0,0) - (\tfrac{3}{4}c_2 - \tfrac{1}{2}c_1, -\tfrac{1}{4}c_2 + \tfrac{1}{2}c_1) \;=\; (\tfrac{1}{2}c_1 - \tfrac{3}{4}c_2, -\tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{4}c_2) \;\leq\; 0
\end{aligned}
$$

vilket ger två olikheter som resulterar i $\frac{1}{2}c_2 \leq c_1 \leq \frac{3}{2}c_2$.

e) Härledning av formeln för reducerad kostnad. Utgå från ett maximeringsproblem på normalform och en uppdelning i basvariabler x_B och icke-basvariabler x_N, vilket gör att målfunktionskoefficienterna c samt bivillkorsmatrisen A också kan delas upp på samma sätt.

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & z = c_B^{\mathrm{T}} x_B & + & c_N^{\mathrm{T}} x_N & & \\
\text{då} & B x_B & + & N x_N & = & b \\
 & x_B & , & x_N & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Då vi antar att x_B är en bas implicerar det att B^{-1} existerar.
   Lös ut x_B ur bivillkorsekvationen:

$$
B x_B = b - N x_N \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{x_B} = B^{-1} b - B^{-1} N x_N
$$

2. Substituera x_B i uttrycket för z:

$$
\begin{aligned}
z &= c_B^{\mathrm{T}} \underline{x_B} + c_N^{\mathrm{T}} x_N \;=\; c_B^{\mathrm{T}} (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c_N^{\mathrm{T}} x_N \\
&= c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N x_N + c_N^{\mathrm{T}} x_N \;=\; \underbrace{c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b}_{:=\, z(x_B)} + \underbrace{(c_N^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N)}_{:=\text{ reducerad kostnad}} x_N
\end{aligned}
$$

Första delen är målfunktionsvärdet i den aktuella baslösningen (eftersom $x_N = 0$), och den andra delen är just reducerade kostnaden som talar om hur målfunktionsvärdet kommer att ändra på sig då en icke-basvariabel antar ett positivt värde.

Uppgift 3.

a) Öka målfunktionskoefficienten för husbilar, 350 till 355, ändring inom intervall.

Aktuell baslösning förblir alltså optimal, vi tillverkar 40 husbilar och ökar intäkterna med 5 tkr per husbil, vilket ger en vinst på $5 \cdot 40 = 200$ tkr.

b) Öka högerled, från 70 till 80, utanför intervallet (övre gräns 76). Skuggpriset 350 gäller i varje fall de första 6 stegen, vilket ger en minsta intäkt på $6 \cdot 350 = 2100$ tkr.

Eftersom den fasta avgiften är på 2000 tkr, vilket är lägre än 2100 tkr, så bör Bil AB anta erbjudandet.

c) Variabler som är strikt större än noll måste vara basvariabler. Utskriften visar att $X1$, $X2$ och $M1$ är positiva, likaså slackvariablerna för villkor 3–5 (maskin2, tillgång och krav1). Med sex variabler som är positiva, och sex bivillkor, har vi alltså identifierat våra basvariabler.

Vi får att $x_B = \{X1, X2, M1, S3, S4, S5\}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Minska högerled, från 40 till 0, inom intervallet. Skuggpriset är -10 och gäller i 40 steg, vilket ger en intäkt på $10 \cdot 40 = 400$ tkr per vecka. På tre veckor skulle det ge en ökad vinst på $3 \cdot 400 = 1200$ tkr.

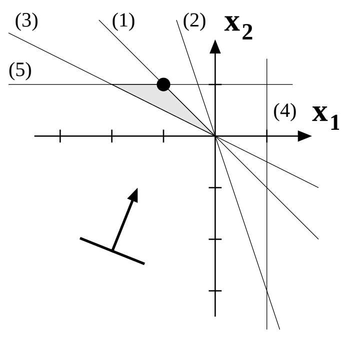
Att bryta kontraktet kostar 1000 tkr, vilket är mindre än vad vinsten ökar med, alltså bör Bil AB bryta kontraktet.

Uppgift 4.

a) Det duala problemet.

$$
\begin{array}{llrcll}
\max & z = & 2v_1 + 5v_2 & & & \\
\text{då} & & 2v_1 + 2v_2 & \leq & 0 & (1) \\
& & 3v_1 + v_2 & \leq & 0 & (2) \\
& & -v_1 - 2v_2 & \leq & 0 & (3) \\
& & v_1 & \leq & 1 & (4) \\
& & v_2 & \leq & 1 & (5) \\
& & v_1 \;,\; v_2 & & \text{fria} &
\end{array}
$$

b) Grafiskt lösning av duala problemet.



Detta ger $v* = (-1, 1)^{\mathrm{T}}$ och ett optimalt målfunktionsvärde $z^* = 3$.

c) Eftersom vi har ett LP-problem gäller stark dualitet, alltså är $w^* = z^* = 3 > 0$. Detta betyder att åtminstone en artificiell variabel är strikt större än 0, dvs. det saknas tillåtna lösningar. Mängden $\mathbb{X}$ är alltså tom.

Uppgift 5.

Låt $g_i(x),\ i = 1, \ldots, 4$, beteckna vänsterledet i de fyra bivillkoren (1)–(4). Vi börjar med att ta fram alla gradienter.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - 8 \\ 1 \end{pmatrix},\ \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Teckna KKT-villkoren, dvs. primal tillåtenhet, komplementaritet och dual tillåtenhet.

1. Primala tillåtenhet

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x_1^2 - x_2 && \geq 0 \\ g_2(x) &= 2x_1 + x_2 && \leq 8 \\ g_3(x) &= x_1 && \leq a \\ g_4(x) &= x_2 + x_3 && \geq b \end{aligned}$$

2. Komplementaritet

$$\begin{aligned} v_1 \cdot (\ g_1(x) - 0\ ) &= 0 \\ v_2 \cdot (\ g_2(x) - 8\ ) &= 0 \\ v_3 \cdot (\ g_3(x) - a\ ) &= 0 \\ v_4 \cdot (\ g_4(x) - b\ ) &= 0 \end{aligned}$$

3. Dual tillåtenhet

$$\nabla f(x) = v_1 \cdot \nabla g_1(x) + v_2 \cdot \nabla g_2(x) + v_3 \cdot \nabla g_3(x) + v_4 \cdot \nabla g_4(x)$$
$$v_1 \geq 0,\ v_2 \leq 0,\ v_3 \leq 0,\ v_4 \geq 0$$

b) Bestäm alla värden på a och b så att punkten $\bar{x} = (2, 4, 2)^{\mathrm{T}}$ uppfyllet KKT-villkoren.

1. Primala tillåtenhet						2. Komplementaritet		
(1):	$2^2 - 4 = 0$	$\geq$	0	ok!		Aktivt	$\Rightarrow$	$v_1 = ?$
(2):	$2 \cdot 2 + 4 = 8$	$\leq$	8	ok!		Aktivt	$\Rightarrow$	$v_2 = ?$
(3):	$2 = 2$	$\leq$	a	ok		?	$\Rightarrow$	$v_3 = ?$
(4):	$4 + 2 = 6$	$\geq$	b	ok		?	$\Rightarrow$	$v_4 = ?$

Vi beräknar $\nabla f(\bar{x}),\ \nabla g_i(\bar{x}),\ i = 1, \ldots, 4$, och sätter upp den duala tillåtenheten.

$$\text{Konen:} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Från tredje raden får vi att $v_4 = 1 > 0$, vilket betyder att (4) måste vara aktivt. Alltså är $b = 6$. Från andra raden kan vi härleda att $v_1 = 1 + v_2$, genom att utnyttja att $v_4 = 1$. Substituera nu detta uttryck för v_1 i första raden så får vi att $v_3 = -6v_2$, och eftersom $v_2, v_3 \leq 0$ är detta endast möjligt om $v_2 = v_3 = 0$. Att $v_3 = 0$ betyder att villkor (3) inte behöver vara aktivt, men skulle kunna vara det, och vi får att $a \geq 2$. Att $v_2 = 0$ ger att $v_1 = 1 > 0$.

Svar: Punkten $\bar{x}$ uppfyller alla KKT-villkor med $v = (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ då $a \geq 2$ och $b = 6$.

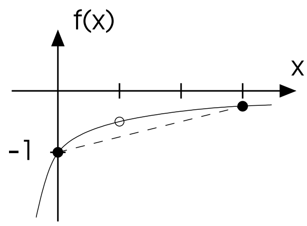
c) Visa att $f(x) = -(1+x)^{-1}$ inte är en konvex funktion för $x \geq 0$ genom att använd definitionen för en konvex funktion.

Definition: Funktionen $f(x)$ är en konvex funktion på det tillåtna området $\mathbb{X}$ om det för varje val av punkter, $x^{(1)},\ x^{(2)} \in\ \mathbb{X}$ och $0 \leq \lambda \leq 1$ gäller att $f(\bar{x})\ \leq\ \bar{y}$, där

$$\bar{x} = \lambda \cdot x^{(1)} + (1-\lambda) \cdot x^{(2)} \quad \text{och} \quad \bar{y} = \lambda \cdot f(x^{(1)}) + (1-\lambda) \cdot f(x^{(2)}).$$

Motexempel

Vi ritar upp funktionen $f(x) = -\frac{1}{1+x}$.



Vi väljer $x^{(1)} = 0$ och $x^{(2)} = 3$, markerade med svarta punkter i bilden, och beräknar deras funktionsvärden, $f(0) = -1$ och $f(3) = -\frac{1}{4}$.

Sen bildar vi en ny punkt, $\bar{x} = \lambda \cdot (0) + (1-\lambda) \cdot (3) = 3 - 3\lambda$, där $0 < \lambda < 1$. Funktionsvärdet i motsvarande punkt beräknas som $f(\bar{x})$, medan linjärkombinationen av funktionsvärdena (den streckade linjen) blir $\bar{y} = \lambda \cdot (-1) + (1-\lambda) \cdot (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\lambda$.

Vi kan se i bilden att om λ väljs så att $\bar{x}$ hamnar mellan värdena 0 och 3, då kommer vi att bryta mot kravet att $f(\bar{x}) \leq \bar{y}$. Vi kan t.ex. välja $\lambda = \frac{2}{3}$, vilket ger $\bar{x} = 3 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$.

Slutligen, eftersom $f(\bar{x}) = -\frac{1}{2}$ och $\bar{y} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{3}{4}$, ser vi att $f(\bar{x}) > \bar{y}$. Vi bryter alltså mot kravet, och har bevisat att funktionen $f(x)$ inte är konvex.

d) Uttryck $f(x) = x_1 x_2^2 - 4x_1^2 + 3x_2$ som en funktion av steglängden t, där

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$$

vilket ger $f(t) = t^3 - 4t^2 - 3t$ och $f'(t) = 3t^2 - 8t - 3$. Börja med att bekräfta att intervallets ändpunkter ger oss olika tecken på derivatan.

$$f'(0) = -3 < 0, \quad f'(8) = 3 \cdot 8^2 - 8 \cdot 8 - 3 = 2 \cdot 64 - 3 > 0$$

Vi ser att derivatan byter tecken någonstans mellan 1 och 8. Med en tabell enligt boken får man:

k	α_k	m_k	β_k	$f'(m_k)$	$\beta_k - \alpha_k$
0	0	4	8	$3 \cdot 16 - 8 \cdot 4 - 3 = 13 > 0$	8
1	0	2	4	$3 \cdot 4 - 8 \cdot 2 - 3 = -7 < 0$	4
2	2	3	4	$3 \cdot 9 - 8 \cdot 3 - 3 = 0$	2

Vi hittar ett optimalt steg $t^* = 3$ efter två intervallhalveringar!