Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	15:e augusti 2017
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3 – 5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh
Jourhavande lärare:	Oleg Burdakov 013-28 14 73

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

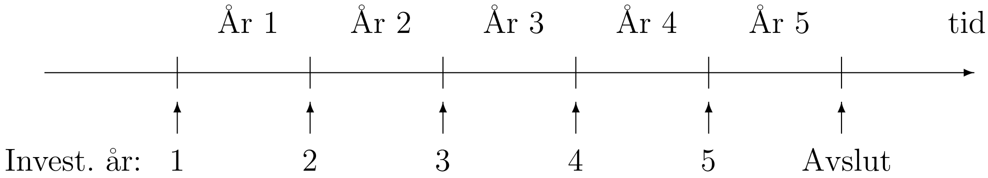
Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

De nyexaminerade studenterna Linus och Linnea, ett par sen många år, vill lägga upp en sparplan för att om 5 år kunna köpa sig ett hus. Med ett startbelopp på 300 tkr, som alltså finns tillgängliga idag, gäller det nu att lägga upp en bra investeringsplan för att maximera de förväntade tillgångarna om 5 år.

Man har identifierat tre lovande investeringsalternativ (1-års, 2-års och 4-års) med lite olika egenskaper, men alla alternativ fungerar på samma sätt; en specifik dag i början på varje år investeras valfritt belopp i respektive alternativ, och utbetalningen (avkastningen + det man investerat) kommer sedan efter 1, 2 eller 4 år.

Hela startbeloppet måste investeras, och samtliga utbetalningar som sker under årens lopp ska återinvesteras samma dag som de betalas ut, förutom efter det femte året då samtliga investeringar ska avslutas. (Då planeringshorisonten är 5 år kan t.ex. en 2-årsinvestering bara göras i början av år 1, 2, 3 och 4.)



För varje investeringsalternativ finns angivet en bindningstid (1, 2 resp. 4 år), en förväntad avkastning (5%, 14% resp. 22%), och en riskklass (3, 5 resp. 4). Det finns också ett fjärde alternativ (dock endast tillgängligt det första året), att låsa en viss summa pengar under 5 år på ett bankkonto med en relativt låg avkastning på 8%, men det är också väldigt säkert (riskfaktor 1).

Slutligen vill man också ta hänsyn till risken. Medelrisken för de investeringar man väljer att göra *varje* år får inte överstiga 3,7. (Om t.ex. 100 kr placeras till risken 2 och 300 kr till risken 4 så blir medelrisken $(2 \cdot 100 + 4 \cdot 300)/(100 + 300) = 3{,}5$.)

a) Hjälp Linus och Linnea att bestämma hur mycket pengar som ska investeras i de olika alternativen varje år, med målet att maximera sina förväntade tillgångar efter 5 år, genom att formulera en linjär optimeringsmodell. **(3p)**

b) Antag nu att banken tar ut en transaktionsavgift på 1% av beloppet varje gång en investering görs (samma för alla alternativ), som tas från investeringsbeloppet. Vidare har banken infört en svidande stor straffavgift som utgår då den totala transaktionskostnaden under de 5 åren överstiger 7 tkr. Linus och Linnea vill inte betala nån straffavgift, och kommer därför inte att accepterar en investeringsplan där straffavgiften måste betalas.

Justera och utöka modellen från a) för att hantera dessa nya förutsättningar, och se till att modellen fortfarande är linjär. **(1p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 & (1) \\
& & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 & (2) \\
& & x_1 & & & \leq & 3 & (3) \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

där $c_1 = 3$ och $c_2 = 4$.

a) Lös problemet med hjälp av simplexmetoden. Ange optimallösningen och det optimala målfunktionsvärdet. **(1p)**

b) Beräkna den optimala duallösningen genom formeln $v^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$. **(1p)**

c) Härled för vilka värden på högerledet i första bivillkoret (just nu är $b_1 = 8$) som den aktuella baslösningen förblir optimal, både grafiskt och algebraiskt! **(1p)**

d) Använd formeln för reducerad kostnad och härled samband mellan c_1 och c_2 vilka beskriver samtliga kombinationer av värden på c_1 och c_2 som ger samma optimallösning som i **a)**-uppgiften. **(1p)**

Följande deluppgift är helt fristående.

e) Betrakta ett maximeringsproblem på normalform och antag att vi känner en tillåten baslösning. Variablerna kan då delas upp i basvariabler x_B och icke-basvariabler x_N, och målfunktionskoefficienterna c samt bivillkorsmatrisen A kan delas upp på samma sätt.

$$
\begin{array}{llcl}
\max & z = c^{\mathrm{T}}x & & \\
\text{då} & Ax & = & b \\
& x & \geq & 0
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{llcrcl}
\max & z = c_B^{\mathrm{T}}x_B + c_N^{\mathrm{T}}x_N & & & & \\
\text{då} & Bx_B & + & Nx_N & = & b \\
& x_B & , & x_N & \geq & 0
\end{array}
$$

Härled formeln för reducerad kostnad! Alternativt, teckna dualen och visa att teckenkraven på den reducerade kostnaden för optimalitet är detsamma som dual tillåtenhet. **(1p)**

Uppgift 3.

Företaget Bil AB tillverkar lyxiga bilar och enklare husbilar, vilka ger en inkomst på 400 tkr per lyxbil och 350 tkr per husbil. Marknaden kräver för tillfället att minst 25 lyxbilar tillverkas varje vecka, och på grund av ett kontrakt med en återförsäljare måste minst 40 husbilar tillverkas varje vecka.

Bil AB kan hyra in upp till 70 maskiner av typ 1 varje vecka till en kostnad av 50 tkr per maskin. Företaget har även tillgång till 52 stycken maskiner av typ 2 och 400 ton stål varje vecka. Vid tillverkning av en lyxbil går det åt 3 ton stål samt 1,0 veckor i maskin 1 och 0,7 veckor i maskin 2. För en husbil går det åt 5 ton stål samt 0,9 veckor i maskin 1 och 0,6 veckor i maskin 2.

Modellen och lösningen till motsvarande LP-problem finns att skåda i utskriften på nästa sida. Använd denna information för att svara på frågorna. Motivera alla svar!

a) Vad händer med vinsten om försäljningspriset för husbilar ökar med 5 tkr? **(1p)**

b) Bil AB förhandlar med uthyraren av maskiner (av typ 1) om att flytta den övre gränsen från 70 till 80 maskiner per vecka. Hyran per maskin och vecka är fortfarande densamma (50 tkr), men för denna utökade kapacitet måste Bil AB betala en fast avgift på 2000 tkr. Bör Bil AB anta erbjudandet? **(1p)**

c) Ange vilka variabler som är basvariabler i den aktuella optimallösningen, och ange därefter motsvarande basmatris B. **(1p)**

d) Bil AB funderar på att avbryta samarbetet med återförsäljaren av husbilar. Kontraktet är giltigt i ytterligare tre veckor, och vid ett upplösande av kontraktet i förtid måste Bil AB betala 1000 tkr i straffavgift till återförsäljaren.

Hur bör Bil AB agera? **(1p)**

```
# MODELL
#----------------------------------------------------------------------

var X1 >= 0;            # Antal tillverkade Lyxbilar
var X2 >= 0;            # Antal tillverkade Husbilar
var M1 >= 0;            # Antal inhyrda Maskin 1


maximize obj:   400*X1 + 350*X2 - 50*M1;

subject to
maskin1:           X1 + 0.9*X2   -  M1  <=   0;
max_hyra:                           M1  <=  70;
maskin2:        0.7*X1 + 0.6*X2         <=  52;
tillgang:         3*X1 +   5*X2         <= 400;
krav1:              X1                  >=  25;
krav2:                     X2           >=  40;



# LÖSNING
#----------------------------------------------------------------------

: _objname      _obj :=
1  obj          24100

: _varname      _var    _var.rc    _var.down _var.current _var.up  :=
1   X1           34        0        -388.89      400        1e+20
2   X2           40        0         -1e+20      350         360
3   M1           70        0           -400      -50        1e+20


: _conname   _con.slack _con.dual  _con.down _con.current _con.up  :=
1   maskin1        0       400          -9          0           6
2   max_hyra       0       350          61         70          76
3   maskin2       4.2        0        47.8         52       1e+20
4   tillgång      98         0         302        400       1e+20
5   krav1          9         0      -1e+20         25          34
6   krav2          0       -10           0         40          50
;
```

Uppgift 4.

För att avgöra om mängden

$$\mathbb{X} = \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

innehåller några tillåtna lösningar, eller om den är tom (saknar lösningar), kan man introducera artificiella variabler a_1 och a_2 och lösa följande Fas I - problem.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcl} \min & w = & & & & & & & a_1 & + & a_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & a_1 & & & = & 2 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & a_2 & = & 5 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & a_1 & , & a_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Teckna dualen till det givna Fas I - problemet ovan. **(1p)**

b) Lös det duala problemet grafiskt. **(1p)**

c) Utnyttja optimallösningen till det duala problemet för att avgöra om den givna mängden $\mathbb{X}$ är tom eller inte. **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta följande icke-linjära problem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\min & f(x) = & x_1^2 + (x_2-4)^2 + x_3 & & & & & & & \\
\text{då} & & x_1^2 & - & x_2 & & & \geq & 0 & (1) \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 8 & (2) \\
 & & x_1 & & & & & \leq & a & (3) \\
 & & & & x_2 & + & x_3 & \geq & b & (4)
\end{array}
$$

a) Teckna KKT-villkoren för problemet. **(1p)**

b) Avgör för vilka värden på konstanterna a och b som punkten $\bar{x} = (2, 4, 2)^T$ uppfyller KKT-villkoren. Lös problemet algebraiskt och ange även multiplikatorernas värden för dessa val av konstanter. **(2p)**

Följande deluppgifter är helt fristående.

c) Bevisa att funktionen $f(x) = -(1+x)^{-1}, x \geq 0$, inte är konvex genom att använda definitionen för en konvex funktion. **(1p)**

d) Betrakta problemet att minimera funktionen $f(x) = x_1 x_2^2 - 4x_1^2 + 3x_2$ i sökriktningen $d = (1, -1)^T$ med början i punkten $x = (0, 0)^T$.

Använd intervallhalvering för att bestämma den optimala steglängden t, utgå från intervallet $[0, 8]$ och utför som mest 5 iterationer. **(1p)**