Lösningsförslag till Tentamen i TAOP52 den 3:e juni 2017

Uppgift 1.

a) Variabeldefinitioner:

x_{it} = antal enheter av produkt i som tillverkas under dag t

L_{it} = antal enheter av produkt i som finns i en lagertank i slutet av dag t

y_{it} = antal enheter av produkt i som levereras under dag t

b) Modell (utan lagerbalansvillkor):

$$
\begin{array}{llcll}
\min\ z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{t=1}^{5} c_{it}x_{it} & & & \\
\text{då} & X_i^{\min} \leq x_{it} & \leq & X_i^{\max} & i = 1,2,3,\ t = 1,\ldots,5 \\
& I_i^{\min} \leq L_{it} & \leq & I_i^{\max} & i = 1,2,3,\ t = 1,\ldots,5 \\
& \displaystyle\sum_{t=1}^{5} y_{it} & \geq & d_i & i = 1,2,3 \\
& L_{i0} & = & I_i^{\text{init}} & i = 1,2,3 \\
& x_{it},\ y_{it} & \geq & 0 & i = 1,2,3,\ t = 1,\ldots,5 \\
& L_{it} & \geq & 0 & i = 1,2,3,\ t = 0,\ldots,5
\end{array}
$$

c) För detta lilla exempel är det endast produkt 1 som används som input till andra produkter, och mängderna blir $P_1 = \{2,3\},\ P_2 = \emptyset,\ P_3 = \emptyset$.

$$
L_{i,t-1} + x_{it} = L_{it} + y_{it} + \sum_{j \in P_i} a_{ij}x_{jt}, \qquad i = 1,2,3,\ t = 1,\ldots,5
$$

Uppgift 2.

a) I baslösning **K** är $x_1 > 0,\ s_1 > 0,\ s_3 < 0,\ s_4 > 0$ basvariabler, ty x_1 är inte i origo och inget av bivillkoren (1), (3) och (4) är aktiva, alltså måste deras slackvariabler vara strikt positiva. Övriga variabler, $x_2 = s_2 = 0$, är alltså icke-basvariabler.

b) Baslösningar **F** och **H**. Om s_3 är icke-basvariabel så betyder det att $s_3 = 0$, alltså befinner vi oss på bivillkor (3). De andra tre, **A**, **E** och **L**, är inte tillåtna.

c) Antingen från **F** till **H**, eller från **C** till **D**. Då det handlar om Fas II måste vi gå från en tillåten baslösning till en ny närliggande tillåten baslösning där $s_1 > 0$. Baslösningar **C** och **F** är tillåtna och $s_1 = 0$ är just nu icke-basvariabel.

d) Fas I startar i origo, dvs. baslösning **J**. I varje steg förflyttar man sig närmare det tillåtna området. I första iterationen blir antingen x_1 eller x_2 inkommande, och möjliga pivoteringsvägar är **J** till **K** till **H**, eller **J** till **G** till **F**.

Uppgift 3.

a) Minska högerled, 600 till 550, ändring inom intervall. Skuggpriset 160 gäller alltså hela vägen, vilket ger en förlust på $50 \cdot 160 = 8000$ kr.

b) Öka målfunktionskoefficienten för TrioTent från 950 till 965, går utanför intervallet (övre gräns 960). Det är dock alltid OK att stå kvar i nuvarande baslösning, även om det inte är optimalt, vilket ger oss en undre gräns för vinstökningen på $15 \cdot 30 = 450$ kr.

En optimistisk skattning är inte möjligt att räkna ut.

c) Nej, problemet har alternativa optimallösningar. Detta kan vi se eftersom det finns en icke-basvariabel (`xLyx`) med reducerad kostnad 0.

d) Utskriften visar att målfunktionskoefficienten för `xUno`, låt oss kalla den för c_1, har intervallet $-\infty < c_1 \leq 480$. Vi kan räkna fram detta genom att använda formeln för reducerad kostnad:

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{v^T} N$$

där $v^T = (0, 0, 160, 0, -10)$. Kravet är att aktuell baslösning förblir optimal, dvs. att den reducerade kostnaden för alla icke-basvariabel är ≤ 0 (ty max-problem).

Eftersom `xUno` är en icke-basvariabel räcker det att räkna ut reducerad kostnad för just denna variabel: $\bar{c}_1 = c_1 - v^T a_1$ där $a_1 = (3, 6, 3, 3, 0)^T$.

Vi får att

$$\bar{c}_1 = c_1 - (0, 0, 160, 0, -10) \cdot (3, 6, 3, 3, 0)^T \; = \; c_1 - 480 \; \leq \; 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \leq 480$$

Det går givetvis bra att räkna ut reducerad kostnad för alla icke-basvariabler, men de övriga kommer ändå inte att ändra på sig.

[En alternativ lösning är att notera att `xUno`, med ett försäljningspris på 350 kr, får en reducerad kostnad på -130. Det betyder att så länge försäljningspriset höjs med något som är mindre än 130 så kommer dess reducerade kostnad fortfarande att vara negativ. Alltså, $c_1 \leq 350 + 130 = 480$.]

e) Ny variabel, vi kan använda formeln $\bar{c}_{\text{ny}} = c_{\text{ny}} - v^T a_{\text{ny}}$ för att räkna ut dess reducerade kostnad, där $c_{\text{ny}} = f(\alpha)$, $a_{\text{ny}} = (4, 5, \alpha, 6, 0)^T$ och v^T som tidigare. Vi får att

$$\begin{aligned} \bar{c}_{\text{ny}}(\alpha) &= f(\alpha) - (0, 0, 160, 0, -10) \cdot (4, 5, \alpha, 6, 0)^T \\ &= f(\alpha) - 160\alpha \;=\; -\tfrac{4}{3}\alpha^3 + 4\alpha^2 + 12\alpha - 40 \end{aligned}$$

Frågan är nu om det finns något värde på $\alpha \geq 0$ som gör att $\bar{c}_{\text{ny}}(\alpha) > 0$, vilket är ett krav för att den nya modellen ska vara lönsam (ty max-problem). Derivera $\bar{c}_{\text{ny}}(\alpha)$ med avseende på α och sätt till 0, vilket ger ett andragradsuttryck i α:

$$\bar{c}_{\text{ny}}(\alpha)' = -4\alpha^2 + 8\alpha + 12 = 0 \iff \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \Longrightarrow \alpha = 1 \pm \sqrt{1+3}$$

Vi får alltså att $\alpha = (-1),\ +3$, en lösning försvinner på grund av kravet $\alpha \geq 0$, och eftersom $\bar{c}_{\text{ny}}(3) = -4 < 0$ är det alltså inte möjligt att få modellen lönsam.

Man bör även kontrollera att $\alpha = 3$ verkligen ger en max-punkt.

$$\bar{c}_{\text{ny}}(\alpha)'' = -8\alpha + 8 \; < \; 0 \text{ då } \alpha > 1, \text{ alltså är } \alpha = 3 \text{ en max-punkt!}$$

Uppgift 4.

a) Det duala problemet blir

$$\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & w = & b_1v_1 & + & b_2v_2 & + & b_3v_3 & & & \\
\text{då} & & 3v_1 & + & 2v_2 & + & v_3 & \leq & c_1 & (1) \\
& & v_1 & + & v_2 & + & 2v_3 & \leq & c_2 & (2) \\
& & v_1 & + & 2v_2 & + & v_3 & \leq & c_3 & (3) \\
& & v_1 & , & v_2 & , & v_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

b) Optimalitetsvillkoren för LP-problem:

1. Primal tillåtenhet för $x^* = (2,3,0)^T$			2. Komplementaritet	
(1):	$3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 9 \geq b_1$		$v_1 = 4 \neq 0$	$\Rightarrow \quad b_1 = 9$
(2):	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 7 \geq b_2$		$v_2 = 0$	$\Rightarrow \quad b_2 = \ ?$
(3):	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 8 \geq b_3$		$v_3 = 1 \neq 0$	$\Rightarrow \quad b_3 = 8$

3. Dual tillåtenhet för $v^* = (4,0,1)^T$			2. Komplementaritet	
(1):	$3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 13 \leq c_1$		$x_1 = 2 \neq 0$	$\Rightarrow \quad c_1 = 13$
(2):	$1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6 \leq c_2$		$x_2 = 3 \neq 0$	$\Rightarrow \quad c_2 = 6$
(3):	$1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5 \leq c_3$		$x_1 = 3 \neq 0$	$\Rightarrow \quad c_3 = \ ?$

Vi får alltså att $c_1 = 13,\ c_2 = 6,\ c_3 \geq 5,\ b_1 = 9,\ b_2 \leq 7$ och $b_3 = 8$.

c) Då $\bar{x} = (4,0,-3)^T$ sätts in i målfunktionen, med $c_1 = 13$ och $c_2 = 6$, får vi att

$$z \ = \ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \ = \ 13 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + c_3 \cdot (-3) \ = \ 34$$

vilket ger att $52 - 3c_3 = 34 \quad \Longleftrightarrow \quad c_3 = 6$ (vilket stämmer med att $c_3 \geq 5$).
Använd nu komplementvillkoren för punkten $\bar{x}$ och hitta motsvarande duala baslösning.

Primala komplementvillkor		Slutsats	
(1):	$3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 9 \geq 9$	Aktivt	$\Rightarrow \quad v_1 = \ ?$
(2):	$2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = 2 \geq b_2$	Aktivt?	$\Rightarrow \quad v_2 = \ ?$
(3):	$1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 1 \neq 8$	Ej aktivt	$\Rightarrow \quad v_3 = 0$

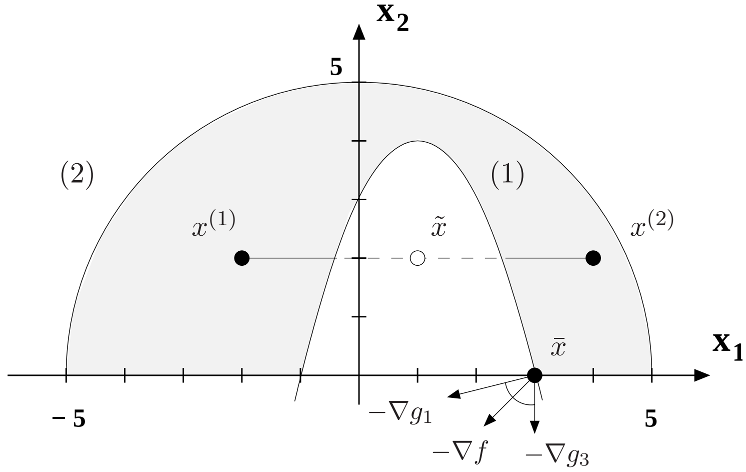
Duala Komplementvillkor			
(1):	$(3v_1 + 2v_2 + v_3 - 13) \cdot x_1 = 0$	$x_1 \neq 0$	$\Rightarrow \quad 3v_1 + 2v_2 = 13$
(2):	$(v_1 + v_2 + 2v_2 - 6) \cdot x_2 = 0$	$x_2 = 0$	$\Rightarrow \quad ?$
(3):	$(v_1 + 2v_2 + v_3 - 6) \cdot x_3 = 0$	$x_3 \neq 0$	$\Rightarrow \quad v_1 + 2v_2 = 6$

Vi får att $v_1 = 3.5$ och $v_2 = 1.25$, vilket genom insättning i målfunktionen ger att $\underline{34} = z = w = 9v_1 + b_2v_2 + 8v_3 = 9 \cdot 3.5 + 1.25b_2 + 8 \cdot 0 = \underline{31.5 + 1.25b_2} \ \Leftrightarrow \ b_2 = 2.$

Uppgift 5.

Vi börjar med att skissa det tillåtna området och att ta fram alla gradienter.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 5 \\ -2x_1 + 6x_2 + 7 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad H(x)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Vi undersöker om punkten $\bar{x} = (3,0)^T$ uppfyllet KKT-villkoren.

1. Primala tillåtenhet						2. Komplementaritet		
(1):	$(3-1)^2 + 0$	$=$	$4 \geq$	4	ok!	Aktivt	$\Rightarrow$	$v_1 = \ ?$
(2):	$(3)^3 + (0)^2$	$=$	$9 <$	25	ok!	Ej aktivt	$\Rightarrow$	$v_2 = 0$
(3):	0	$=$	$0 \geq$	0	ok!	Aktivt	$\Rightarrow$	$v_3 = \ ?$

Vi beräknar $\nabla f(\bar{x})$, $\nabla g_1(\bar{x})$ och $\nabla g_3(\bar{x})$ och sätter upp den duala tillåtenheten.

Konen: $\nabla f(\bar{x}) = \nabla g_1(\bar{x}) + \nabla g_3(\bar{x}) \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi får att $v_1 = 0.25 \geq 0$ och $v_3 = 0.75 \geq 0$, alltså är alla KKT-villkor är uppfyllda!

b) Problemet är <u>inte</u> konvext, vi ser tydligt att det tillåtna området inte är en konvex mängd. Återstår alltså bara att göra ett matematiskt motexempel.

Välj t.ex. $x^{(1)} = (-2,2)^T$ och $x^{(2)} = (4,2)^T$. Dessa punkter är tillåtna, dvs. uppfyller alla bivillkor.

Villkor	Punkten $x^{(1)}$				Punkten $x^{(2)}$			
(1)	$(-2-1)^2 + 2 \ = 11$	$\geq$	4	ok!	$(4-1)^2 + 2 \ = 11$	$\geq$	4	ok!
(2)	$(-2)^2 + (2)^2 \ = \ 8$	$\leq$	25	ok!	$(4)^2 + (2)^2 \ = 20$	$\leq$	25	ok!
(3)	$2 \ = \ 2$	$\geq$	0	ok!	$2 \ = \ 2$	$\geq$	0	ok!

Vi bildar nu $\tilde{x}$, en linjärkombination av dessa: $\tilde{x} \ = \ \lambda \cdot (-2,2)^T + (1-\lambda) \cdot (4,2)^T$

Välj t.ex. $\lambda = \frac{1}{2}$ och vi får $\tilde{x} \ = \ \frac{1}{2} \cdot (-2,2)^T + \frac{1}{2} \cdot (4,2)^T = (1,2)^T \qquad [\ 0 < \lambda < 1\ ]$

Denna punkt bryter nu mot villkor (1): $(1-1)^2 + 2 = 2 \ngeq 4$. Vi har nu visat matematiskt att det tillåtna området <u>inte</u> är en konvex mängd.

c) Beräkna $\nabla f(x)$ i punkten $\hat{x} = (3.5, 0.5)^T$ och ta fram Newtonriktningen:

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3.5 - 2 \cdot 0.5 - 5 \\ -2 \cdot 3.5 + 6 \cdot 0.5 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad H(\hat{x})^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_{NM} = -H(\hat{x})^{-1} \nabla f(\hat{x}) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Riktningsderivatan blir: $\nabla f(\hat{x})^T \cdot d_{NM} = (1, 3) \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1 \end{pmatrix} = -4.5 < 0$

Newtonriktningen d_{NM} i punkten $\hat{x} = (3.5, 0.5)^T$ är alltså en descentriktning.

d) Beräkna $\nabla f(x)$ i punkten $\bar{x} = (3, 0)^T$ och ta fram Brantaste lutningsriktningen. Då vi har ett min-problem blir $d_{BL} = -\nabla f(x)$:

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 5 \\ -2 \cdot 3 + 6 \cdot 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad d_{BL} = -\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vi noterar att $||\nabla f(\bar{x})|| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} > 0$, punkten är alltså inte optimal, och vi vill ta ett steg i BL-riktningen. Uttryck nästa punkt som funktion av steglängden t och sätt in i målfunktionen.

$$x(t) = \bar{x} + t \cdot d_{BL} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - t \\ -t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= (3-t)^2 - 2 \cdot (3-t) \cdot (-t) + 3 \cdot (-t)^2 - 5 \cdot (3-t) + 7 \cdot (-t) \\ &= (t-3)^2 + 4t + t^2 - 15 \\ f'(t) &= 2 \cdot (t-3) + 4 + 2t = 4t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Nästa punkt blir alltså $\quad x(t^*) = \begin{pmatrix} 3 - 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

Är punkten optimal?

Beräkna $\nabla f(x)$ i den nya punkten $x(t^*) = (2.5, -0.5)^T$.

$$\nabla f(x(t^*)) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2.5 - 2 \cdot (-0.5) - 5 \\ -2 \cdot 2.5 + 6 \cdot (-0.5) + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den nya punkten är alltså <u>inte</u> optimal och vi borde egentligen fortsätta iterera.