Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP52/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för I och Ii

Datum:	3:e juni 2017
Tid:	08.00–12.00
Hjälpmedel:	1 st handskrivet A4 (fram- och baksida).
Antal uppgifter:	5
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	Varje uppgift kan ge 3 – 5 poäng.
	Totalt finns 21 poäng.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Nils-Hassan Quttineh
Jourhavande lärare:	Nils-Hassan Quttineh 013-28 21 85

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

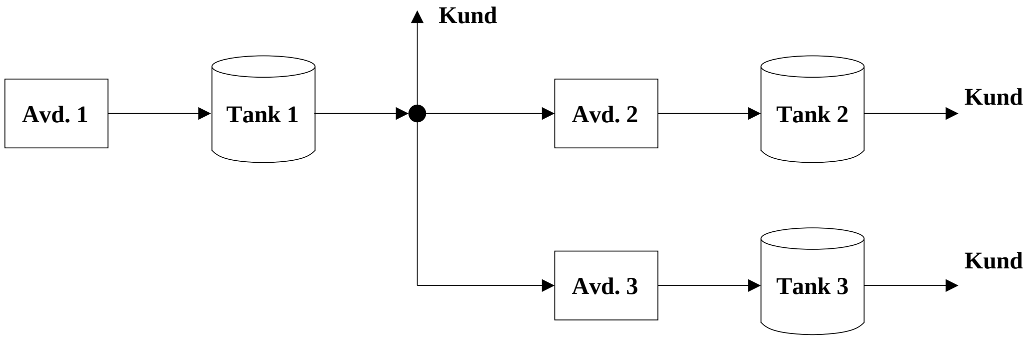
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

En tillverkare av kemikaliska komponenter vill planera sin produktion av tre produkter de kommande fem dagarna. Produktionen sker vid tre olika avdelningar inom fabriken, och varje avdelning tillverkar varsin produkt. Produkterna lagras i stora tankar i väntan på att antingen levereras till kund eller att användas som input vid en annan avdelning. Figuren nedan visar flödesschemat för produktionen. Leverans av produkterna till kund kan ske varje dag, men måste efter de fem dagarna sammanlagt uppfylla den givna efterfrågan på d_i enheter (m^3) för varje produkt $i = 1, 2, 3$.



Avdelning i producerar alltså motsvarande produkt i, och varje avdelning har givna undre och övre gränser för produktionstakten, $X_i^{\min}$ respektive $X_i^{\max}$, och dessa gränser är angivna i m^3/dag. Produktionskostnaderna ges av c_{it} kr/m^3 och är olika beroende på vilken produkt i och vilken dag $t = 1, \ldots, 5$ det handlar om.

Tankarnas storlekar sätter fysiska begränsningar på hur mycket av varje produkt som går att lagra (angivet i m^3), och dessa betecknas $I_i^{\min}$ respektive $I_i^{\max}$. I början av tidshorisonten innehåller respektive tank I_i^{init} enheter (m^3) av produkt i.

Företaget vill nu bestämma en produktionsplan som gör att efterfrågan uppfylls samtidigt som de totala produktionskostnaderna minimeras.

a) För att formulera en matematisk modell krävs det variabler för *tillverkning*, *lagerhållning* och *kundleverans*. Skriv ner tydliga variabeldefinitioner för detta problem. **(1p)**

b) Ange problemets målfunktion och samtliga bivillkor *förutom* lagerbalansvillkor för tankarna. **(1p)**

c) Låt mängden P_i, för varje produkt i, innehålla de produkter j som behöver produkt i som input. För varje producerad enhet (m^3) av en viss produkt j krävs det a_{ij} enheter (m^3) av produkt i som input.

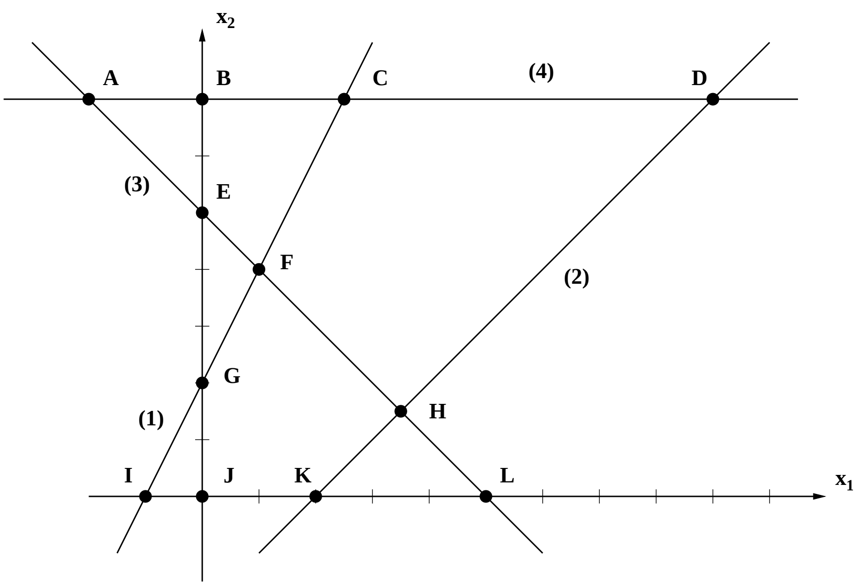
Använd denna generella notation för att ange lagerbalansvillkoren för de tre tankarna på summaform. **(2p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande linjära optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & & \\
\text{då} & & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & (1) \\
& & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & (2) \\
& & x_1 & + & x_2 & \geq & 5 & (3) \\
& & & & x_2 & \leq & 7 & (4) \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Låt s_1, s_2, s_3 och s_4 vara slackvariabler till bivillkor (1) – (4). Det tillåtna området för problemet illustreras i figuren nedan, där baslösningarna har märkts ut med bokstäverna **A**, **B**, ... , **L**.



I samtliga deluppgifter ska du kort motivera ditt svar. Detta innebär att uppgifterna kommer bedömas på sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng.

a) Ange vilka variabler som är basvariabler i baslösning **K**? **(1p)**

b) Ange samtliga *tillåtna* baslösningar där s_3 är icke-basvariabel. **(1p)**

c) Antag att s_1 blir inkommande basvariabel under simplexmetoden Fas II. Vilken eller vilka förflyttningar kan detta svara mot? Beskriv en förflyttning i termer av *från baslösning X till baslösning Y* och motivera kort ditt svar. **(1p)**

d) Ange alla pivoteringsvägar (sekvenser av baslösningar) som är möjliga att få då man löser Fas I - problemet. **(1p)**

Uppgift 3.

Ett företag som tillverkar campingtält erbjuder fyra modeller inför sommaren och hösten; UnoTent, DuoTent, TrioTent samt TrioLyx. Försäljningspriset för respektive tält är 350 kr, 800 kr, 950 kr och 1280 kr.

Vid produktion av de olika modellerna krävs tid i två olika avdelningar: klippning och montering. Det går åt olika lång tid i de olika avdelningarna för varje modell, vilket fångas av upp av den matematiska modellens två resursbegränsande bivillkor.

Utöver tid i de olika avdelningarna går det åt en hel del material vid tillverkningen av tälten. Företaget har patenterat två vatten- och vindavvisande material, material A och material B, och varje tältmodell kräver en viss mängd av dessa.

Varje vecka har företaget tillgång till 800 minuter för klippning och 900 minuter till montering, samt 600 m^2 av material A och 1100 m^2 av material B. På grund av ett gammalt kontrakt måste minst 30 tält av modell TrioTent tillverkas.

Företaget vill maximera sin vinst. Modellen och lösningen till motsvarande LP-problem finns att skåda i utskriften på nästa sida. Använd denna information för att svara på frågorna.

Glöm inte att motivera alla svar noggrant!

a) Hur påverkas vinsten om tillgången på material A minskar med 50 enheter? **(1p)**

b) Hur påverkas vinsten om försäljningspriset för TrioTent ökar med 15 kr? **(1p)**

c) Är problemets optimallösning unik? **(1p)**

d) Beräkna (för hand) det giltiga intervallet för UnoTents försäljningspris. **(1p)**

e) Företaget funderar på att introducera en ny modell, NewTent, men är osäkra på huruvida det är möjligt att få det lönsamt. Den nya modellen skulle kräva 4 minuter i klippavdelningen, 5 minuter i monteringen, α enheter av material A och 6 enheter av material B. Den nya modellen påverkar inte tillverkningskravet av TrioTent. Parametern α måste givetvis vara positiv.

Försäljningspriset $f(\alpha)$ är starkt kopplat till användningen av material A; ju mer av materialet som används desto högre måste försäljningspriset sättas. Om företaget gör följande antagande på försäljningspriset,

$$f(\alpha) = -\frac{4}{3}\alpha^3 + 4\alpha^2 + 172\alpha - 40,$$

är det då möjligt att få den nya produkten lönsam? **(1p)**

```
# MODELL
#---------------------------------------------------------------------

var xUno  >= 0;      # Antal tält som tillverkas av sort UnoTent
var xDuo  >= 0;      # Antal tält som tillverkas av sort DuoTent
var xTrio >= 0;      # Antal tält som tillverkas av sort TrioTent
var xLyx  >= 0;      # Antal tält som tillverkas av sort TrioLyx


maximize z:   350*xUno + 800*xDuo + 950*xTrio + 1280*xLyx

subject to
klippning:      3*xUno +   5*xDuo +   6*xTrio +   10*xLyx   <=   800;
montering:      6*xUno +   7*xDuo +   8*xTrio +    9*xLyx   <=   900;
material_A:     3*xUno +   5*xDuo +   6*xTrio +    8*xLyx   <=   600;
material_B:     3*xUno +   5*xDuo +   9*xTrio +    8*xLyx   <=  1100;
krav_Trio:                              xTrio               >=    30;



# LÖSNING
#---------------------------------------------------------------------

: _objname    _obj      :=
1   z        95700
;

: _varname         _var      _var.rc     _var.down  _var.current  _var.up   :=
1   xUno            0         -130       -1e+20          350        480
2   xDuo           84            0          800          800      1e+20
3   xTrio          30            0       -1e+20          950        960
4   xLyx            0            0       -1e+20         1280       1280
;

:    _conname   _con.slack  _con.dual    _con.down  _con.current  _con.up   :=
1   klippning     200           0          600          800      1e+20
2   montering      72           0          828          900      1e+20
3   material_A      0         160          180          600        651.43
4   material_B    410           0          690         1100      1e+20
5   krav_Trio       0         -10            0           30        100
;
```

Uppgift 4.

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\min & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & b_1 & (1) \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & b_2 & (2) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & b_3 & (3) \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

där c_1, c_2, c_3, b_1, b_2 och b_3 är parametrar.

a) Teckna det duala problemet. **(1p)**

b) För vilket eller vilka värden på parametrarna är $x^* = (2, 3, 0)^T$ och $v^* = (4, 0, 1)^T$ optimala baslösningar i det primala respektive duala problemet? **(1p)**

c) Utgå från svaret i **b)**–uppgiften. Antag att $\bar{x} = (4, 0, -3)^T$ svarar mot en otillåten baslösning i det primala problemet, med ett målfunktionsvärde på 34.

Kan vi med hjälp av denna nya information bestämma unika värden på alla parametrar? **(2p)**

Uppgift 5.

Betrakta följande icke-linjära problem.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\min & f(x) = & x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 5x_1 + 7x_2 & & & & & \\
\text{då} & & (x_1-1)^2 & + & x_2 & \geq & 4 & (1) \\
& & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq & 25 & (2) \\
& & & & x_2 & \geq & 0 & (3)
\end{array}
$$

Följande uppgifter bygger alla på samma grundproblem, men kan lösas helt fristående. Motivera svaren noggrant!

a) Uppfyller punkten $\bar{x} = (3, 0)^T$ KKT-villkoren? **(1p)**

b) Är problemet konvext? Visa eller motbevisa matematiskt. **(1p)**

c) Antag att vi relaxerar alla bivillkor men behåller målfunktionen $f(x)$.
Beräkna sökriktningen för Newtons metod, d_{NM} i punkten $\hat{x} = (3.5, 0.5)^T$.
Är detta en ascent- eller descentriktning? **(1p)**

d) Antag att vi relaxerar alla bivillkor men behåller målfunktionen $f(x)$.
Utför en iteration med Brantaste lutningsmetoden, starta i punkten $\bar{x} = (3, 0)^T$.
Använd exakt linjesökning när steglängden bestäms. **(1p)**