Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, gk
Lösning till tentamen
2009-08-14

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Basbågar i den givna lösningen är (1,2), (1,3) och (3,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 2$, $y_4 = 6$, vilket ger reducerade kostnader $\hat{c}_{14} = 0$ (vilket är optimalt) och $\hat{c}_{24} = 2$ (vilket indikerar att x_{24} bör minskas). Vi får alltså x_{24} som inkommande variabel, minskning. Cykeln blir (2,4) bakåt, (1,2) bakåt, (1,3) framåt och (3,4) framåt. Av dessa blir det (1,3) som först stöter på en gräns, så x_{13} blir utgående variabel, och ändringen blir en enhet.

I nästa iteration fås $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$, $y_4 = 8$, vilket ger reducerade kostnader $\hat{c}_{14} = -2$ (vilket är optimalt) och $\hat{c}_{13} = -2$ (vilket också är optimalt). Vi har alltså optimum. Flödet i alla bågar är 2.

1b: Vi har $y_1 = 0$ och $y_4 = 8$, vilket ger $\hat{c}_{14} = c_{14} - 8$. $x_{14} = u_{14}$, så om $c_{14} \leq 8$ är optimallösningen oförändrad.

1c: Alla bågar som har $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$ måste vara basbågar. Om detta ger ett uppspännande träd, har man en baslösning. Om detta ger för få bågar, får man en degenererad baslösning genom att lägga till bågar, så att resultatet blir ett uppspännande träd.

Däremot, om detta ger för många bågar (dvs. cykler), så är den givna lösningen inte en baslösning. För att få en baslösning, kan man helt enkelt skicka runt flöde i varje sådan cykel, tills en av bågarna i cykeln blir "utgående". (Har man otur, kan kostnaden ökas genom detta.) När inga cykler återstår, har man en baslösning.

Uppgift 2

2a: LP-dual:

$$\begin{array}{lll} \min & v = & \sum_{j=1}^{n} y_j \\ \text{då} & & y_j \geq 1 \quad j = 1, \dots n \\ & & y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots n \end{array}$$

2b: Optimallösning: $x_j = 1$ och $y_j = 1$ för alla j.

2c: 1. x-lösningen ovan är tillåten i primalen.
2. y-lösningen ovan är tillåten i dualen.
3. Komplementaritet är uppfyllt. (Alla bivillkor är uppfyllda med likhet.)

1, 2 och 3 tillsammans ger att lösningarna optimala.

2d: $z = n = v$.

Uppgift 3

3a: Snabbaste väg: 1 - 3 - 5 - 6. Tid: 65 min.

3b: Utgående från startlösningen fås maximal flödesökande väg: 1 - 3 - 4 - 6, med kapacitet 5. Skicka. Därefter fås ett minsnitt: (1,2), (1,3). Maxflöde: 40 bilar.

3c: Ny snabbaste väg: 1 - 3 - 4 - 6. Tid: 80 min. F.d. snabbaste väg har tid 85 min.

3d: Tiden för snabbaste väg påverkas ej. När det gäller maxflödet, finns inte den flödesökande väg som erhölls i uppgift b. Istället fås minsnitt (1,2),(5,6) med kapacitet 35.

3e: Ny snabbaste väg: 1 - 2 - 4 - 6. Tid: 70 min. När det gäller maxflödet, minskas kapaciteten för en båge i minsnittet med 5, vilket gör att maxflödet minskas med 5.

Uppgift 4

4a: P0: Första LP-opt: $x_1 = 0$, $x_2 = 8/5$, $z = 24/5 = 4.8$. Detta ger $\bar{z} = 4$. (Valfritt: Avrundning ger den tillåtna lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, med $\underline{z} = 3$.)
Förgrena över x_2. Skapa P1 ($x_2 \leq 1$) och P2 ($x_2 \geq 2$).
P2 saknar tillåten lösning. Kapa.
P1: $x_1 = 3/4$, $x_2 = 1$, $z = 4.5$. Detta ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_1. Skapa P3 ($x_1 \leq 0$) och P4 ($x_1 \geq 1$).
P4: $x_1 = 1$, $x_2 = 4/5 = 0.8$, $z = 4.4$. Detta ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_2. Skapa P5 ($x_2 \leq 0$) och P6 ($x_2 \geq 1$).
P6 saknar tillåten lösning. Kapa.
P5: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 4$. Detta ger $\underline{z} = 4$.
Vi har nu P3 kvar, men eftersom P1 har $\bar{z} = 4$, så kan den grenen kapas direkt.
Trädet avsökt. P5 ger optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 4$.

4b: $x_1 + 2x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Uppgift 5

5a: En klick är en fullständig delgraf, vilket betyder att högst en av variablerna vars noder ingår i klicken får vara lika med ett. Låt S vara mängden av noder som ingår i klicken. Bivillkoret blir då $\sum\limits_{j \in S} x_j \leq 1$.

En fördel är att dessa bivillkor troligen är mycket starka, dvs. minskar skillnaden mellan LP-relaxationen och heltalsproblemet. En nackdel är att det är *NP*-fullständigt att hitta den största klicken i en graf.

5b: Då kan högst en av variablerna vara lika med ett. Gå igenom alla variablerna och välj den bästa. (Om det inte är bättre att låta alla vara noll.)

Uppgift 6

6a: Bivillkoret ger $x_j = 0$ för alla j.

6b: Bivillkoret är redundant, dvs. man kan sätta alla variabler till ett om man vill. Optimallösning: $x_j = 1$ om $c_j < 0$, $x_j = 0$ om $c_j > 0$, och valfritt om $c_j = 0$.

6c: Bivillkoret kan skrivas om som $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq b/a$, och skärpas till $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq \lfloor b/a \rfloor$. LP-relaxationen kommer nu att ge en heltalig lösning. Lös med greedy-metoden för kontinuerligt kappsäcksproblem. (Ett-sätt variabeln med $\max c_j$ först, osv.)

6d: Optimallösning: $x_j = 0$ för alla j. (Man skulle förlora på att öka någon.)

6e: LP-relaxationen kan ge vilken tillåten lösning som helst, eftersom kvoterna c_j/a_j alla är lika med ett. Detta gör det snarast svårare att lösa problemet med trädsökning.

6f: Om $c_j > 0$ så är $a_j < 0$ och vi vinner på att sätta $x_j = 1$ (både i målfunktion och bivillkor), så det är optimalt att sätta $x_j = 1$. Om $c_j < 0$ så är $a_j > 0$ och vi skulle förlora på att sätta $x_j = 1$, så det är optimalt att sätta $x_j = 0$.

Sammanfattningsvis blev alla fall utom e trivialt lösbara.

Uppgift 7

7a: Matchningsproblemet. (Max vikt.)

7b: Grafen blir tudelad, så matchningsproblemet blir ett tillordningsproblem och kan lösas med ungerska metoden.

7c: Problemet faller sönder i två separata problem, som ju blir lättare att lösa.

7d: Handelsresandeproblemet, som är *NP*-svårt. Grafen är fullständig, så det finns en handelsresandetur.

7e: Jag väljer närmaste-granne-heuristiken. Instruktioner:

1. Du börjar. (Jag pekar på en person.)
2. Fatta handen på den person som står närmast dig.
3. Du som blev utvald, gör samma sak, men du får inte välja en person som redan håller någon i handen.
4. Upprepa detta tills alla håller någon i handen. Nu har bara den sista och den första personen en fri hand, så de sluter ringen.

(Om man skulle kräva att ringen inte korsar sig själv skulle det bli krångligare.)

7f: Grafen blir nu inte längre fullständig. Metoden ovan kan misslyckas, t.ex. om den första och sista personen står mer än två meter från varandra.