Tentamen i TAOP07 Opt grk Y den 23/3-19: svar och kortfattade lösningar.

1. a)
$$\begin{cases} y \geq x_1 + x_2 - 1 \\ y \leq x_1 \\ y \leq x_2 \\ x_1, x_2, y = 0/1 \end{cases}$$

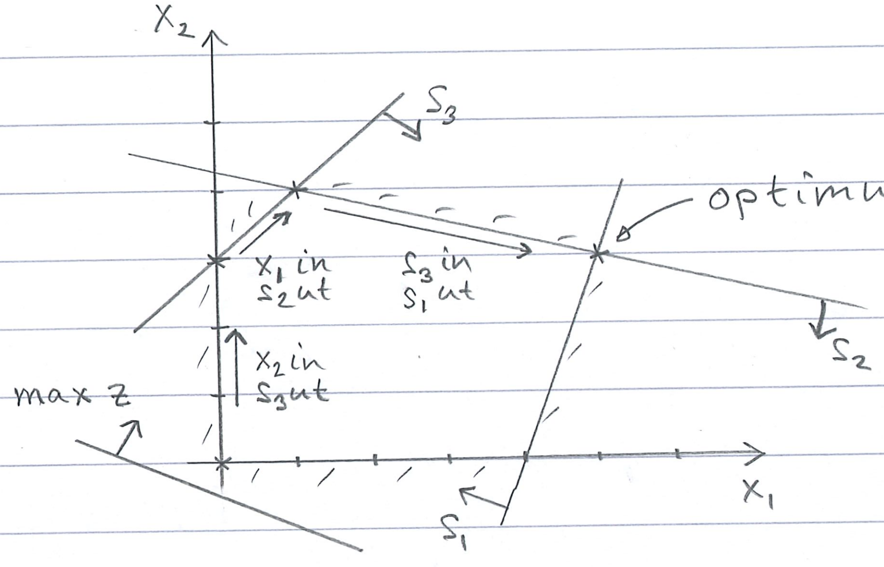
b)
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 4 + (4M-4)(1-y_1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 + (3M-3)(1-y_1) \\ 2x_1 + x_2 \geq 22y_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 21y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ M \geq x_1, x_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 = 0/1 \end{cases}$$

c) $x_1 + (1-x_2) + (1-x_3) + x_4 \geq 1$

2. Inför slackvariabler $s_1, s_2, s_3 \geq 0$.
Iterationssekvens: x_2 inkommande, s_3 utgående
x_1 inkommande, s_2 utgående
s_3 inkommande, s_1 utgående

Optimaltablå:

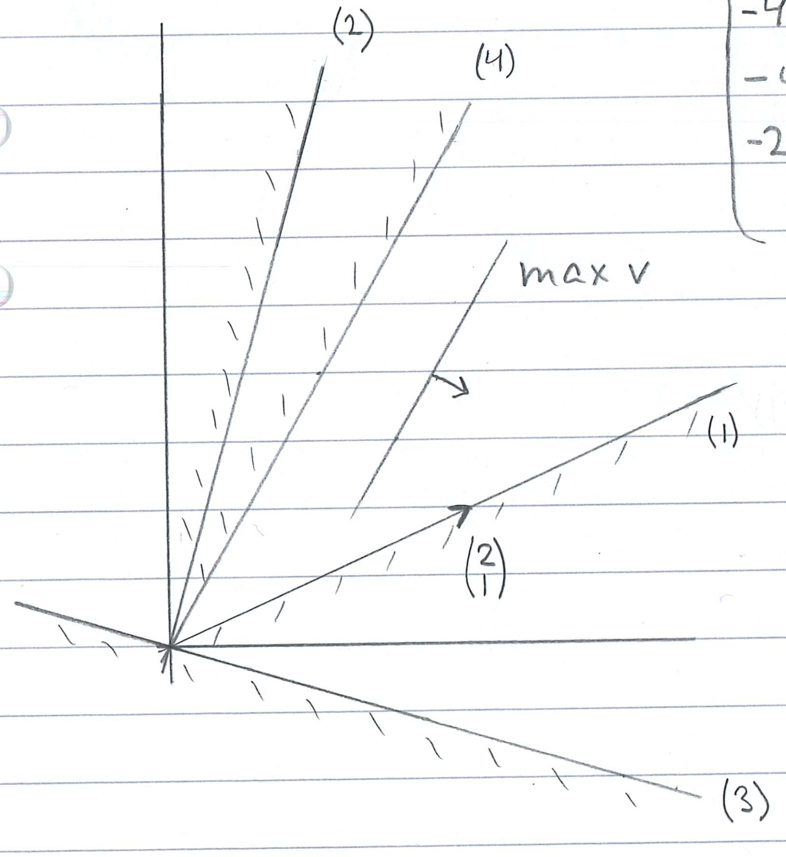
bas	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	h.l.
$-z$	1	0	0	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{7}{13}$	0	-11
s_3	0	0	0	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$	1	5
x_1	0	1	0	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{13}$	0	5
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	3



Om istället x_1 väljs som inkommande i den första iterationen så fås iterationssekvensen: x_1 inkommande och s_1 utgående samt x_2 inkommande och s_2 utgående.

<u>3.</u> Dualt problem: $\max v = 2y_1 - y_2$

$$\text{då} \begin{cases} y_1 - 2y_2 \leq 0 & (1) \\ -4y_1 + y_2 \leq 0 & (2) \\ -y_1 - 3y_2 \leq 0 & (3) \\ -2y_1 + y_2 \leq 0 & (4) \\ y_1,\ y_2 \text{ fria} \end{cases}$$



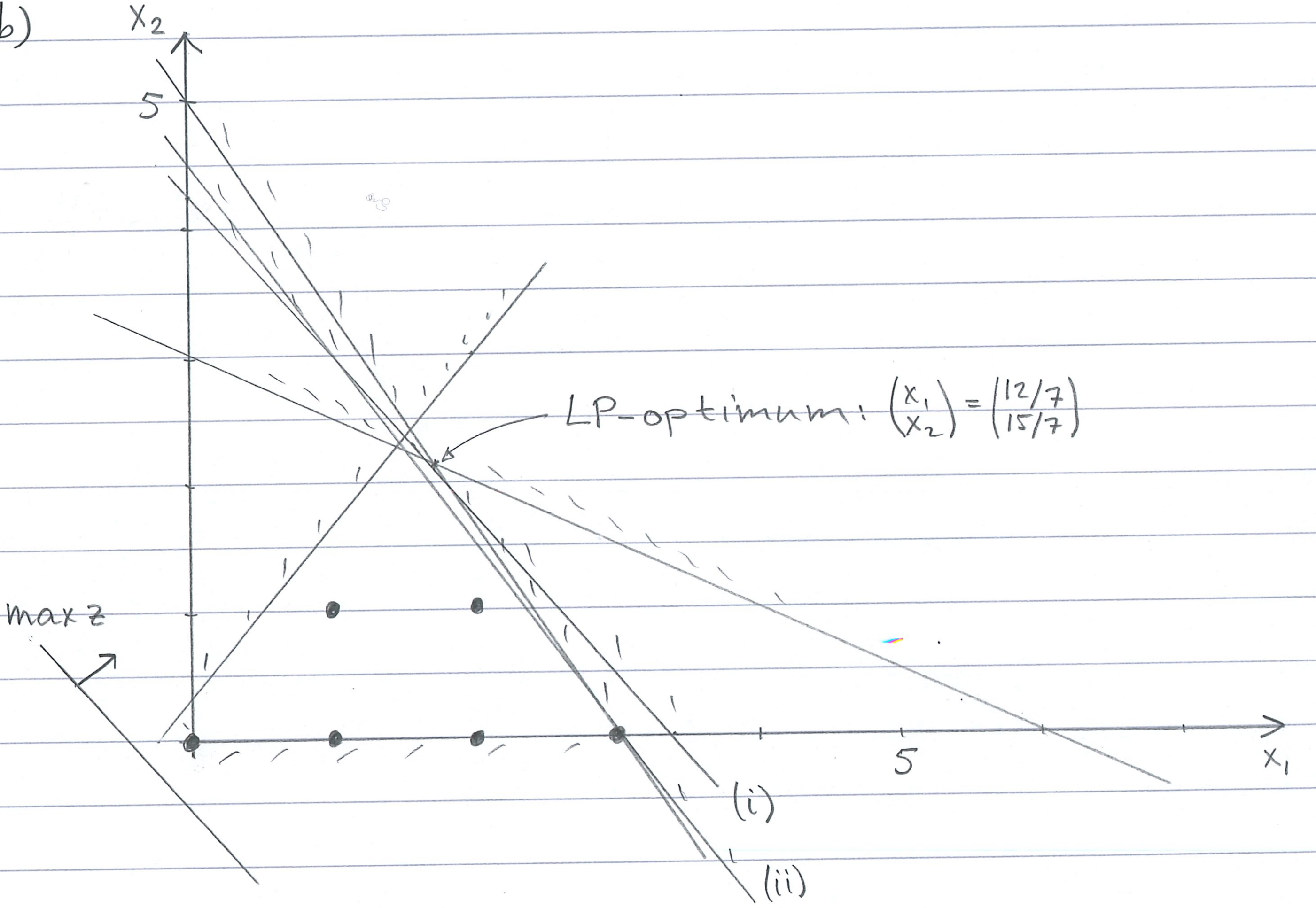
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är tillåten för alla $t \geq 0$, med $v = 3t \to +\infty$ då $t \to +\infty$. Eftersom dualen har obegränsat optimum så gäller att det primala problemet <u>saknar tillåten lösning</u>.

4. a) (2): $x_2 - s_1 \leq 2$

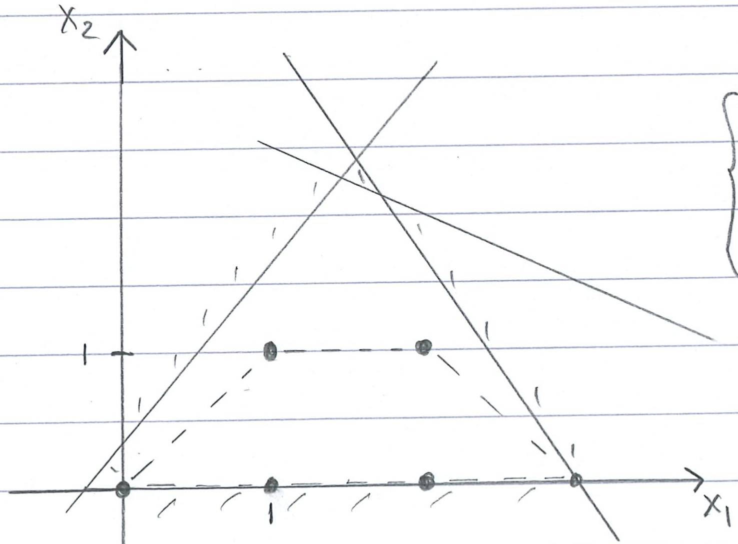
(3): $s_1 - 4s_2 + s_3 \leq 1$

Med $\begin{cases} s_1 = 15 - 5x_1 - 3x_2 \\ s_2 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 1 + 4x_1 - 3x_2 \end{cases}$ fås: $\begin{cases} (2): 5x_1 + 4x_2 \leq 17 & (i) \\ (3): 3x_1 + 2x_2 \leq 9 & (ii) \end{cases}$

b)



c)



Konvexa höljet:

$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 1 \geq x_2 \geq 0 \end{cases}$

Inget av Gomory-snitten definierar en begränsningsyta till konvexa höljet.

5. a)

$$\det(\nabla^2 f(x) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(4-\lambda) - 4 =$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 20 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5} \geq 0, \ \forall x \in R^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ är konvex på R^2

Bivillkoren är linjära, varför mängden av tillåtna lösningar är konvex.

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimeringsproblem} \\ \text{konvex målfunktion} \\ \text{konvext område} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{konvext problem}$$

b) I punkten $\bar{x} = (4,2)^T$ är endast villkoren $x_1 - x_2 \leq 2$ och $x_1 + x_2 \leq 6$ uppfyllda med likhet, varför endast dessa behöver studeras.

Sätt $x(t) = \bar{x} + t\bar{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2t \\ 2-t \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

$x_1(t) - x_2(t) = 4 - 2t - (2-t) = 2 - t \leq 2$ för alla $t > 0$

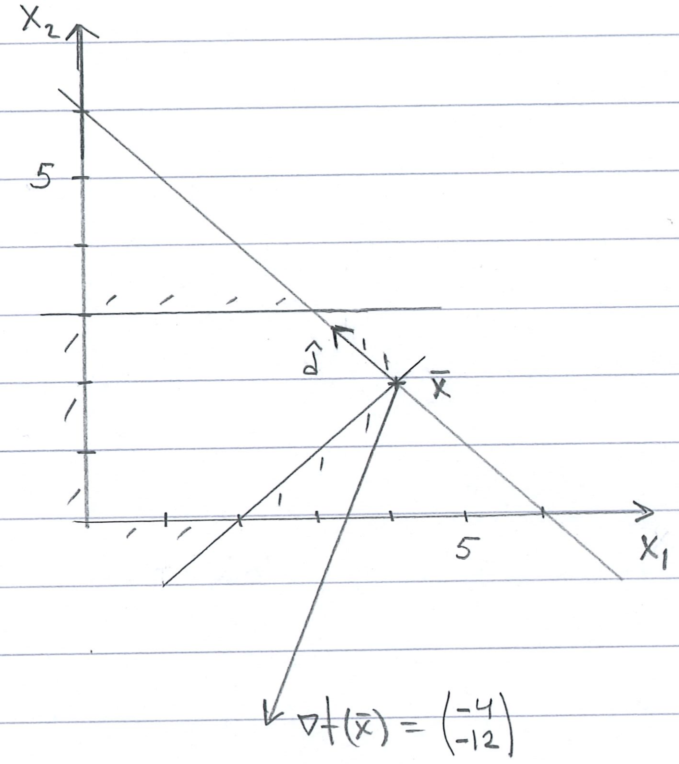
$x_1(t) + x_2(t) = 4 - 2t + 2 - t = 6 - 3t \leq 6$ för alla $t > 0$

Alltså är $\bar{d}$ en tillåten riktning från $\bar{x}$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 - 32 \\ 4x_2 + 2x_1 - 28 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 24 + 4 - 32 \\ 8 + 8 - 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = (-4, -12)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 20 \not< 0 \Rightarrow \bar{d}$ är <u>inte</u> en avtaganderiktning.

c)



Riktningen $\hat{d} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ är tillåten från $\bar{x}$ och ger $\nabla f(\bar{x})^T \hat{d} = -8 < 0$, dvs är en avtagande-riktning, varför $\bar{x}$ inte är ett lokalt minimum.

6. Lagrange-funktion:

$$L(x,y,u) = 10y_1 + 14y_2 + x_{11} + 3x_{12} + 3x_{21} + 2x_{22} + u_1(x_{11} + x_{21} - 4) + u_2(x_{12} + x_{22} - 3)$$

Lagrange-subproblem:

$$h(u) = -4u_1 - 3u_2 + \min\ 10y_1 + (1+u_1)x_{11} + (3+u_2)x_{12} +$$
$$\text{då } 2y_1 - x_{11} - x_{12} \geq 0$$
$$y_1 \in \{0,1\}$$
$$x_{11}, x_{12} \geq 0$$

$$+ \min\ 14y_2 + (3+u_1)x_{21} + (2+u_2)x_{22}$$
$$\text{då } 8y_2 - x_{21} - x_{22} \geq 0$$
$$y_2 \in \{0,1\}$$
$$x_{21}, x_{22} \geq 0$$

$$h(-5,-5) = 35 + \min\{10y_1 - 4x_{11} - 2x_{12}\} + \min\{14y_2 - 2x_{21} - 3x_{22}\} =$$

då $2y_1 - x_{11} - x_{12} \geq 0$, $y_1 \in \{0,1\}$, $x_{11}, x_{12} \geq 0$ då $8y_2 - x_{21} - x_{22} \geq 0$, $y_2 \in \{0,1\}$, $x_{21}, x_{22} \geq 0$

$$= 35 + \min\{\underset{y_1 = x_{11} = x_{12} = 0}{0}, \underbrace{10 - 4\cdot 2}_{y_1 = 1,\ x_{11} = 2,\ x_{12} = 0}\} + \min\{\underset{y_2 = x_{21} = x_{22} = 0}{0}, \underbrace{14 - 3\cdot 8}_{y_2 = 1,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 8}\} = 35 + 0 - 10 = 25$$

$h(u) \leq z^*,\ \forall u \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(-5,-5) \leq z^* \Rightarrow \underline{\underline{z^* \geq 25}}$

Subproblemlösning: $y_1 = x_{11} = x_{12} = 0$ och $y_2 = 1, x_{21} = 0, x_{22} = 8$.
Är den tillåten i ursprungliga problemet?

(1): $x_{11} + x_{21} = 0 + 0 \neq 4$
(2): $x_{12} + x_{22} = 0 + 8 \neq 3$

Nej! Ingen pessimistisk skattning fås!

<u>Svar</u>: $z^* \geq 25$

7. a) Om b ökas från värdet -3 så fås en <u>större</u> mängd av tillåtna lösningar, dvs problemet relaxeras, varför det optimala målfunktionsvärdet endast kan vara oförändrat eller minska. Derivatan $v'(-3)$ kan alltså <u>inte</u> vara positiv. <u>Falskt</u>!

[Skiss på en längre lösning: Först konstateras

att problemet är konvext. Därefter visas att för $b=-3$ är skärningspunkten mellan villkoren, $x=(3,0)^T$, en KKT-punkt, och alltså ett globalt minimum. De två KKT-multiplikatorerna är positiva, vilket betyder att skärningspunkten är optimal även för värden på b som är nära -3. Skärningspunkten som funktion av b ges av $x(b)=(2-b/3,\ 1+b/3)^T$. Om denna sätts in i målfunktionen fås
$v(b)=2(x_1(b)-3)^2+(x_2(b)-2)^2=2(1+\frac{b}{3})^2+(\frac{b}{3}-1)^2$, vilket ger $v'(-3)=-\frac{4}{3}$.]

b) Acykliskt nätverk $\Rightarrow$ använd Bellmans ekvationer.

$y_1=0$, $p_1=-$
$y_2=0+1=1$, $p_2=1$
$y_3=\min\{0-1,1-3\}=-2$, $p_3=2$
$y_4=\min\{1+2,-2-2\}=-4$, $p_4=3$
$y_5=\min\{1+3,-2+1,-4+c\}$

Den givna vägen är billigast om och endast om $-4+c\leq-2+1 \Leftrightarrow c\leq3$. (För $c=3$ finns två billigaste vägar.) Sant!

c) För $x>0$ fås $f(x)=e^{-x}$ och $f''(x)>0 \Rightarrow$ för $x>0$ är $f(x)$ olinjär och konvex $\Rightarrow f(x)$ kan inte vara konkav på $\mathbb{R}$. Falskt!