Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	23 mars 2019
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	*Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

a) Ett optimeringsproblem innehåller de tre variablerna x_1, x_2 och y, som alla ska anta 0/1–värden. Variablerna ska vara relaterade enligt

$$y = \begin{cases} 1 & \text{om } x_1 = x_2 = 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Modellera detta samband med *linjära* villkor. **(1p)**

b) Ett optimeringsproblem innehåller kravet att *antingen* ska villkoren

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

vara uppfyllda, *eller* också ska villkoren

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 22 \\ x_1 + 2x_2 \geq 21 \end{cases}$$

vara uppfyllda. (Uppenbarligen kan båda paren av villkor inte uppfyllas samtidigt.) Vi vet att både x_1 och x_2 endast kan anta värden mellan 0 och M, där $M \gg 1$. Modellera kravet ovan med hjälp av binära hjälpvariabler och *linjära* villkor. **(1p)**

c) Ett optimeringsproblem innehåller fyra 0/1-variabler. Vi vill konstruera *ett linjärt* villkor som gör 0/1-lösningen $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) = (0, 1, 1, 0)$ otillåten, men som *inte* skär bort någon annan 0/1-punkt. Hur ska ett sådant villkor se ut? **(1p)**

Uppgift 2.

Lös följande linjära optimeringsproblem med hjälp av simplexmetoden.

$$
\begin{array}{rrcrcl}
z^* = \max z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{då} & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 12 \\
& x_1 & + & 4x_2 & \leq & 17 \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Starta i origo. Illustrera problemet och sekvensen av iterationspunkter med en figur i (x_1, x_2)-rummet. **(3p)**

Uppgift 3.

Avgör om systemet

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\
-2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -1 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

har någon lösning genom att införa målfunktionen

$$
\min \; z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4
$$

och studera det duala problemet. Motivera noga! Det duala problemet får lösas grafiskt. **(3p)**

Uppgift 4.

Betrakta det linjära heltalsproblemet

$$\begin{array}{lrrl} \max \quad z = & 4x_1 & +3x_2 & \\ \text{då} & 5x_1 & +3x_2 & \leq 15 \\ & x_1 & +2x_2 & \leq 6 \\ & -4x_1 & +3x_2 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \text{ och heltal.} \end{array}$$

Låt $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ vara slackvariabler.

En optimal simplextablå för problemets LP-relaxation har följande utseende.

basv.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$	
z	1	0	0	5/7	3/7	0	93/7	(0)
x_1	0	1	0	2/7	−3/7	0	12/7	(1)
x_2	0	0	1	−1/7	5/7	0	15/7	(2)
s_3	0	0	0	11/7	−27/7	1	10/7	(3)

a) Generera Gomorysnitt ur raderna (2) och (3) i simplextablån och redovisa olikheterna enbart i de ursprungliga variablerna (dvs utan slackvariabler). **(1p)**

b) Rita en (stor) figur som illusterar det tillåtna området till problemets LP-relaxation och markera vilka heltalslösningar som är tillåtna i problemet. Markera också var LP-optimum är och var Gomorysnitten som genererades i deluppgift **a** hamnar. **(1p)**

c) Gör en ny figur där du ritar det tillåtna området och markerar det konvexa höljet. Utifrån din figur, teckna de villkor som definierar det konvexa höljet. Avgör om något av de genererade Gomorysnitten definierar en begränsningsyta (fasett) till det konvexa höljet av tillåtna heltalslösningar. **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta det olinjära problemet

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & f(x) & = & 3x_1^2 & + & 2x_2^2 & + & 2x_1x_2 & - & 32x_1 & - & 28x_2 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{då} & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

och den tillåtna punkten $\bar{x} = (4,2)^T$.

a) Avgör om problemet är konvext. **(1p)**

b) Visa att riktningen $\bar{d} = (-2,-1)^T$ är tillåten från $\bar{x}$ och *inte* en avtaganderiktning. **(1p)**

c) Avgör om $\bar{x}$ är ett lokalt minimum. **(1p)**

Uppgift 6.

Studera problemet

$$
\begin{array}{lccccccccl}
\min & z = 10y_1 & +14y_2 & +x_{11} & +3x_{12} & +3x_{21} & +2x_{22} & & \\
\text{då} & & & x_{11} & & +x_{21} & & = 4 & (1) \\
 & & & & x_{12} & & +x_{22} & = 3 & (2) \\
 & 2y_1 & & -x_{11} & -x_{12} & & & \geq 0 & (3) \\
 & & 8y_2 & & & -x_{21} & -x_{22} & \geq 0 & (4) \\
 & & & x_{11}, & x_{12}, & x_{21}, & x_{22} & \geq 0 & \\
 & y_1, & y_2 & & & & & \in \{0,1\}. &
\end{array}
$$

Flytta över konstanterna i högerleden av villkoren (1) och (2) till vänsterleden och Lagrangerelaxera därefter villkoren med multiplikatorerna u_1 respektive u_2. Teckna Lagrangefunktionen och Lagrangesubproblemet. Subproblemet ska förenklas och delas upp i så många delar som möjligt. Lös Lagrangesubproblemet för multiplikatorvärdena $u_1 = -5$ och $u_2 = -5$.

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet till det ursprungliga problemet som erhålls från subproblemlösningen? **(3p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Låt $b \in R$ vara en parameter och

$$\begin{array}{rrl} v(b) = \min & 2(x_1-3)^2 & + (x_2-2)^2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 & \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq b. \end{array}$$

Då gäller att $v'(-3) = \frac{4}{3}$. **(1p)**

b) Betrakta ett riktat nätverk med fem noder och bågkostnader enligt tabellen nedan, där $c \in R$ är en parameter.

	till			
från	2	3	4	5
1	1	-1	-	-
2	-	-3	2	3
3	-	-	-2	1
4	-	-	-	c

Då gäller att om $c \leq 3$ så är bågarna $(1,2), (2,3), (3,4)$ och $(4,5)$ en billigaste väg från nod 1 till nod 5. **(1p)**

c) Funktionen $f(x) = e^{-|x|}$ är konkav på R. **(1p)**