Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	28 augusti 2018
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	*Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Betrakta följande problemställning som handlar om schemaläggning av laddning av elektriska fordon på laddstationer under en given tidsrymd. Det finns n elektriska fordon och m laddstationer. Laddningen ska göras under T på varandra följande tidsperioder. Varje fordon ska laddas vid *en* av laddstationerna. Varje laddstation kan ladda högst *ett* fordon i varje tidsperiod. Laddningen av fordon $j = 1, \dots, n$ kan påbörjas tidigast i tidsperiod T_j^t och den måste avslutas senast i tidsperiod T_j^s, och fordonet behöver laddas under sammanlagt d_j tidsperioder. Dessa tidsperioder behöver inte nödvändigtvis följa på varandra. (Uppenbarligen måste $d_j \leq T_j^s - T_j^t + 1$ gälla för alla j, ty annars vore det omöjligt att ladda alla fordon.) Kostnaden för laddningen varierar mellan tidsperioderna. Låt p_t vara kostnaden för att ladda *ett* fordon vid *en* station under tidsperiod $t = 1, \dots, T$. Formulera en linjär 0/1-modell som schemalägger laddningen av fordonen på stationerna till minimal totalkostnad. **(3p)**

Uppgift 2.

Betrakta LP-problemet

$$
\begin{array}{rrcrcl}
z^* = \max z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\
\\
\text{då} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

a) Lös problemet med simplexmetoden, utgående från origo. Illustrera grafiskt den sekvens av tillåtna baslösningar som fås i metoden. **(1p)**

b) Teckna det duala problemet och illustrera det grafiskt. Den sekvens av *primala* tillåtna baslösningar som erhölls i simplexmetoden svarar via komplemetvillkoren mot en sekvens av *duala* baslösningar. Visa vilken! **(1p)**

c) Antag att det givna problemet utökas med en variabel x_{ny}, med målfunktionskoefficient c_{ny} och bivillkorskoefficienter $A_{ny} = (5, 3)^T$. För vilket värde på c_{ny} fås alternativa optima? **(1p)**

Uppgift 3.

a) Betrakta de två linjära heltalsmodellerna

$$\begin{array}{rrcrcrl} z^* = \max z = & 3x_1 & + & x_2 & & & \\ \text{då} & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 11 & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \text{och heltaliga} \end{array}$$

och

$$\begin{array}{rrcrcrl} z^* = \max z = & 3x_1 & + & x_2 & & & \\ \text{då} & 8x_1 & + & 2x_2 & \leq & 19 & \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \text{och heltaliga,} \end{array}$$

vilka har samma tillåtna lösningar och samma optimum. Verifiera detta grafiskt! Bestäm konvexa höljet av de tillåtna lösningarna och beskriv det med hjälp av linjära villkor i x_1 och x_2. **(1p)**

b) Eftersom de två modellerna ovan har samma målfunktion och samma tillåtna lösningar så utgör de två alternativa formuleringar av ett och samma heltalsproblem. Vilken av formuleringarna är bäst, i meningen att dess LP-relaxation ger den starkaste optimistiska skattningen av z^*? **(1p)**

c) Antag att vi vet att $\bar{x} = (2,1)^T$ är en tillåten lösning till det givna heltalsproblemet, vilket innebär att vi även vet att $z^* \geq 7$. Använd den *andra* modellen ovan och trädsökning för att visa att $\bar{x}$ är optimal. **(1p)**

Uppgift 4.

a) Visa eller motbevisa att mängden $\{x \in R^2 | \, |x_1| - |x_2| \leq 1\}$ är konvex. **(1p)**

b) Avgör om funktionen $f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - x_2$ är konvex på R^2. **(1p)**

c) Betrakta funktionen $v : R^n \to R$ med

$$\begin{array}{rl} v(c) = \max & c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att mängden $\{x \in R^n | Ax = b \text{ och } x \geq 0\}$ är icke-tom och begränsad. Visa att funktionen v är konvex på R^n. **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta problemet

$$
\begin{array}{rcccccc}
\min & f(x) & = & a(x_1-7)^2 & + & b(x_2-6)^2 & \\
\text{då} & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq & 25 \\
& x_1 & + & 3x_2 & \leq & 13 \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0,
\end{array}
$$

där a och b är positiva parametrar, samt punkten $\bar{x} = (4,3)^T$. För vilka värden på a och b är $\bar{x}$ en Karush-Kuhn-Tucker-punkt? (3p)

Uppgift 6.

Betrakta kappsäcksproblemet

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
z^* = \min & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & & \\
\text{då} & 4x_1 & + & 7x_2 & + & 12x_3 & + & 15x_4 & \geq & 19 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1,
\end{array}
$$

dess Lagrange-relaxation

$$
h(u) = 19u + \min \quad (2-4u)x_1 + (4-7u)x_2 + (7-12u)x_3 + (9-15u)x_4
$$

$$
\text{då} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 = 0/1,
$$

där $u \geq 0$ är en Lagrange-multiplikator, samt det Lagrange-duala problemet

$$
h^* = \max_{u \geq 0} h(u).
$$

Bestäm $h(u)$ för *alla* värden på $u \geq 0$, finn ett dualt optimum u^* och beräkna h^*. Vilken information om z^* fås utifrån värdet h^*? (3p)

Uppgift 7.

Avgör om vart och ett av följande påstående om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Betrakta funktionen $f(x) = x_1 x_2^2$ och en punkt $\bar{x} \in R^2$. Då gäller att om $\bar{x}_2 \neq 0$ så existerar Newton-riktningen i $\bar{x}$ och den är en avtaganderiktning. **(1p)**

b) Givet ett oriktat nätverk med sex noder och bågkostnader enligt tabellen nedan, där a, b, c och d är positiva konstanter.

	nod				
nod	2	3	4	5	6
1	a	6	b	16	14
2	-	3	11	c	15
3	-	-	9	12	13
4	-	-	-	d	19
5	-	-	-	-	20

Antag att en billigaste uppspännande träd (minimalträd) ges av bågarna (1,2), (1,4), (2,3), (2,5) och (3,6). Då måste gälla att $d \geq \max\{a, b, c\}$. **(1p)**

c) Givet ett riktat nätverk med sju noder och kostnader på bågarna. Antag att en billigaste väg från nod 1 till nod 3 ges av bågarna (1,4), (4,6) och (6,3), samt att en billigaste väg från nod 3 till nod 7 ges av bågarna (3,2) och (2,7). Då utgör bågarna (1,4), (4,6), (6,3), (3,2) och (2,7) en billigaste väg från nod 1 till nod 7. **(1p)**