Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	5 juni 2018
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	*Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Givet m stycken punkter i R^2 med koordinater (x^i, y^i), $i = 1, \ldots, m$. Antag att vi vill konstruera en cirkelskiva, med valbar centrumpunkt och valbar radie, som har minimal radie givet att cirkelskivan ska täcka minst p stycken av de givna punkterna. Beteckna centrumpunkten med (x, y) och radien med r, och teckna en optimeringsmodell för denna problemställning. Definiera alla storheter som införs. **(3p)**

Uppgift 2.

Betrakta ett linjärt optimeringsproblem med målfunktionen $z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ och ett tillåtet område som definieras av bivillkoren

$$\begin{array}{rcrcrcc} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & R_1 & b_1 \\ -3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & R_2 & b_2 \\ \multicolumn{7}{l}{x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0,} \end{array}$$

där b_1 och b_2 är reella tal och R_1 samt R_2 står för $\leq$ eller $\geq$.

Antag att punkten $x^* = (-1, 1, 0)^T$ är optimal.

a) Bestäm motsvarande komplementära duallösning. **(1p)**

b) Avgör om problemet är av typen minimering eller maximering, bestäm värden på b_1 och b_2, samt bestäm relationerna R_1 och R_2. **(2p)**

Uppgift 3.

a) Givet fem punkter i planet med koordinater $(0,0), (2,0), (1,1), (1,4)$ och $(3,6)$. De fem punkterna ska kopplas samman så billigt som möjligt, givet att kostnaden för att koppla samman två punkter ges av det euklidiska avståndet mellan punkterna. Beräkna en kostnadsmatris och lös problemet med en lämplig standardmetod. **(2p)**

b) Antag att de fem punkterna ska delas in i *två* grupper, så att grupperna ligger så långt ifrån varandra som möjligt. Med detta menas att om man betraktar alla avstånd mellan punkter som ligger i *olika* grupper så ska det minsta av dessa avstånd vara så *stort* som möjligt. Utnyttja resultatet i deluppgift a för att avgöra hur punkterna ska delas upp i två grupper för att detta ska uppnås. Motivera noga! **(1p)**

Uppgift 4.

Lös heltalsproblemet

$$
\begin{array}{rrcrcll}
z^* = \max z = & 6x_1 & + & 5x_2 & & & \\
\text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 & \\
& 9x_1 & + & 11x_2 & \leq & 45 & \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \text{och heltal}
\end{array}
$$

med trädsökning. Förgrena i första hand över variabeln x_1 och i andra hand över x_2. Använd bäst-först-sökning, det vill säga förgrena alltid från det återstående (ej kapade) delproblemet som har *högst* optimistisk skattning (LP-optimalvärde), oavsett var i trädet som detta delproblem finns. LP-relaxationer får lösas grafiskt. **(3p)**

Uppgift 5.

Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 - 5x_2.$$

a) Avgör om problemet är konvext. **(1p)**

b) Gör två iterationer med brantaste lutningsmetoden med exakt linjesökning utgående från startpunkten $x^0 = (1,1)^T$. **(2p)**

Uppgift 6.

Betrakta det linjära 0/1- problemet

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
z^* = \min z = & -12x_1 & - & 15x_2 & - & 18x_3 & - & 11x_4 & - & 20x_5 & - & 19x_6 & & \\
\text{då} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & + & 7x_6 & \leq & 11 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & + & 2x_6 & \leq & 10 \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \leq & 3 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & = & 0/1.
\end{array}
$$

a) Lagrange-relaxera de två första bivillkoren med multiplikatorer $u = (1,3)^T$ och lös det relaxerade problemet. Upprepa för $u = (2,2)^T$. Vilka starkaste möjliga uppskattningar av z^* fås från dessa beräkningar? **(2p)**

b) Vilken eller vilka av följande villkor är giltiga olikheter för det givna problemet?

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
(i) & x_5 & + & x_6 & \leq & 1 & & & & & & & & \\
(ii) & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 2 & & & & \\
(iii) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \leq & 4
\end{array}
$$

(1p)

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påstående om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Problemet

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq & 2 \\ & -x_1^3 & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

har en Karush-Kuhn-Tucker-punkt i $\bar{x} = (1, -1)^T$. **(1p)**

b) Det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \min & z = & - & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{då} & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 & & \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

har obegränsat optimum. **(1p)**

c) Låt

$$\begin{array}{rrrcrcl} v(c_1) = \max & z = & c_1x_1 & + & 4x_2 & & \\ & & & & & & \\ & \text{då} & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 13 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

där c_1 är en reell parameter. Då gäller att $v'(11) = 2$. **(1p)**