Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	17 mars 2018
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	*Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

En tentamenskonstruktör har satt samman en tentamen som består av tre uppgifter, vilka nu ska poängsättas. Uppgifterna ska ge sammanlagt 100 poäng. Med hänsyn tagen till att uppgifterna är olika omfattande ska uppgifterna 1 och 2 ha minst 20 poäng vardera, medan uppgift 3 ska ha minst 30 poäng. Uppgift 1 består till 25 % av frågor som kräver mer än grundläggande kunskaper. Motsvarande andelar för uppgifterna 2 och 3 är 50 %. Konstruktören vill att minst 40 av poängen på tentamen ska kräva mer än grundläggande kunskaper. Konstruktören förväntar sig att de tenterade kommer att få i genomsnitt 50 % av den totala poängen på uppgift 1, 40 % av totala poängen på uppgift 2 och 30 % av totala poängen på uppgift 3. Slutligen vill kontruktören fördela de 100 poängen på de tre uppgifterna så att den förväntade genomsnittliga totala poängen blir så hög som möjligt.

a) Formulera en linjär optimeringsmodell för konstruktörens problem. **(2p)**

b) Man kan visa att den optimala poängsättningen på de tre uppgifterna är 40, 30 respektive 30 poäng. Hur kommer den förväntade genomsnittliga poängen på tentamen förändras om antalet poäng som kräver mer än grundläggande kunskaper sänks från 40 till 39 poäng? **(1p)**

Uppgift 2.

Givet följande linjära optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
z^* = \min z = & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 11x_3 & + & 3x_4 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Betrakta följande punkter.

$$A : (1, 1, 1, 0) \qquad B : (\tfrac{9}{2}, 0, 0, \tfrac{1}{2}) \qquad C : (0, 0, \tfrac{9}{4}, -\tfrac{7}{4})$$

a) Vilken eller vilka av punkterna är tillåtna baslösningar? **(1p)**

b) Teckna det duala problemet. **(1p)**

c) Utnyttja dualitet för att avgöra om någon eller några av punkterna är optimal. **(1p)**

Uppgift 3.

Lös följande 0/1-problem med hjälp av lämplig standardmetod.

$$z^* = \min z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 + 6x_6 + 2x_7 + 6x_8 + 3x_9 + 2x_{10} + 6x_{11}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & & \\
 & -x_1 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 & & \\
 & -x_2 & - & x_4 & + & x_6 & + & x_7 & = & 0 \\
 & -x_3 & + & x_8 & = & 0 & & & & \\
 & -x_7 & - & x_8 & + & x_9 & + & x_{11} & = & 0 \\
 & -x_5 & - & x_6 & - & x_9 & + & x_{10} & = & 0 \\
 & -x_{10} & - & x_{11} & = & -1 & & & & \\
 & x_j & = & 0/1, & \forall j & & & & &
\end{array}$$

(3p)

Uppgift 4.

Lös kappsäcksproblemet

$$z^* = \max z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{array}{lllllllll}
\text{då} & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq 14 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = 0/1
\end{array}$$

med trädsökning. Notera att $\frac{8}{5} > \frac{11}{7} > \frac{6}{4} > \frac{4}{3}$. Använd djup-först-sökning och avsök alltid först ett-grenen. **(3p)**

Uppgift 5.

a) Låt

$$f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 - 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + \nu(x_1^2 + x_2^2)$$

där ν är en reell parameter. För vilka värden på ν är $f(x)$ konvex på R^2? **(1p)**

b) Visa eller motbevisa att mängden

$$X = \{x \in R^2 \mid x_1, x_2 \geq 0 \text{ och } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 1\}$$

är konvex. **(1p)**

c) Antag att mängderna $X_1 \subseteq R^n$ och $X_2 \subseteq R^n$ är konvexa. Visa att då är även mängden $X_1 \cap X_2$ konvex. **(1p)**

Uppgift 6.

Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 \\ \text{då} \quad x_2 &\geq 1 - \frac{1}{e}(1 + ln\ x_1) \\ x_2 &\geq 1 + \frac{1}{2}\left(ex_1^2 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

där $x_1 > 0$ kan antas gälla. Avgör om punkten $\bar{x} = \left(\frac{1}{e}, 1\right)^T$ uppfyller Karush-Kuhn-Tucker villkoren för problemet. **(3p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påstående om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Betrakta kappsäcksproblemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} z^* = \min z = & 33x_1 & + & 17x_2 & + & 20x_3 & + & 19x_4 & + & 13x_5 & & \\ \text{då} & 8x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & + & 5x_5 & \geq & 13 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & = & 0/1. \end{array}$$

Genom att Lagrange-relaxera villkoret med multiplikator $u = 4$ kan man komma fram till slutsatsen att $z^* \in [32, 52]$. **(1p)**

b) Givet ett linjärt optimeringsproblem med icke-negativa variabler som ska anta heltaliga värden. Antag att dess LP-relaxation löses med simplexmetoden och att optimaltablån innehåller raden

$$x_1 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_5 = \frac{10}{3}.$$

Då måste varje tillåten heltalig lösning till problemet uppfylla de två villkoren

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_3 & + & 2x_5 & \leq & 3 \\ x_1 & - & x_3 & + & 3x_5 & \geq & 4. \end{array}$$

(1p)

c) Låt $b_1, b_2 \geq 0$ och

$$\begin{array}{rrcrcl} v(b_1, b_2) = \max & 14x_1 & + & 9x_2 & & \\ \text{då} & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & b_1 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & b_2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Då är $\frac{\partial v(19,12)}{\partial b_1} = 2$ och $\frac{\partial v(19,12)}{\partial b_2} = 3$. **(1p)**