Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	22 augusti 2017
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	*Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Ett radiokommunikationssystem ska utformas genom att n stycken kommunikationskanaler fördelas på högst m stycken tillgängliga frekvensband. Frekvensband i har bredden b_i Hz och kanal j fordrar en bandbredd på a_j Hz (inklusive den extra bandbredd som krävs för att undvika interferens mellan närliggande kanaler, genom att de frekvensseparereras tillräckligt mycket). Målsättningen är att tillordna kanalerna till frekvensbanden på ett sådant sätt att den sammanlagda bandbredden (dvs en summa av bredder b_i) av de frekvensband som *faktiskt utnyttjas*, det vill säga som utnyttjas av *minst en* kanal, blir så låg som möjligt. Formulera denna frågeställning som ett linjärt heltalsoptimeringsproblem. **(3p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande linjära optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\max z = & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = 15 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = 20 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Nedan ges fyra simplextablåer. En av dem är en optimaltablå för detta problem; vilken? Motivera för var och en av de övriga tre, varför de måste förkastas. Dessa kan vara felräknade eller numeriskt korrekta men ändå inte optimala. Målfunktionen är i tablåerna skriven på formen $-z + \bar{c}^{\mathrm{T}} x = -\bar{z}$, där $\bar{c}$ är vektorn med reducerade kostnader och $\bar{z}$ är aktuellt målfunktionsvärde.

Tablå I

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	h.l.
$-z$	1	0	0	-2	0	-20
x_2	0	0	1	1/3	0	10/3
x_4	0	0	0	-2	1	-5
x_1	0	1	0	7/3	0	25/3

Tablå II

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	h.l.
$-z$	1	0	0	0	-1	-15
x_2	0	0	1	0	1/6	5/2
x_3	0	0	0	1	$-1/2$	5/2
x_1	0	1	0	0	7/6	5/2

Tablå III

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	h.l.
$-z$	1	6/7	0	0	0	$-90/7$
x_2	0	$-1/7$	1	0	0	15/7
x_3	0	3/7	0	1	0	25/7
x_4	0	6/7	0	0	1	15/7

Tablå IV

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	h.l.
$-z$	1	0	0	0	-1	-16
x_2	0	0	1	0	1/6	3
x_3	0	0	0	1	$-1/2$	5/2
x_1	0	1	0	0	7/6	5/2

(3p)

Uppgift 3.

Givet det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \max z = \quad & -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{då} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 & \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

och följande fyra punkter i R^3.

$$A : \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)^{\mathrm{T}} \quad B : (0, 2, 0)^{\mathrm{T}} \quad C : (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} \quad D : \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

a) Avgör för varje punkt om den är en hörnpunkt i det tillåtna området. **(1p)**

b) Teckna det duala problemet. **(1p)**

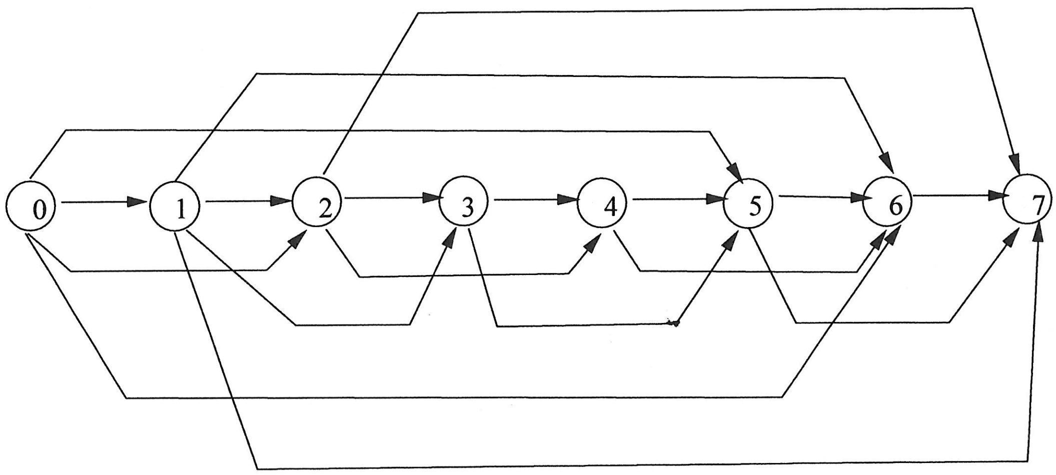
c) Avgör om någon av punkterna är en optimal hörnpunkt. Lösningen skall utnyttja optimalitetsvillkor baserade på LP-dualitet. **(1p)**

Uppgift 4.

Lös kappsäcksproblemet

$$
\begin{array}{rcccccccl}
z^* = \max & 7x_1 & + & 4x_2 & + & 25x_3 & + & 24x_4 & \\
\text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & = 7 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 \text{ och heltal}
\end{array}
$$

genom att i nätverket nedan introducera lämpliga storheter på bågarna och med hjälp av lämplig standardmetod finna en optimal väg från nod 0 till nod 7.



Tolka lösningen till nätverksproblemet som ett optimum till kappsäcksproblemet. **(3p)**

Uppgift 5.

a) Betrakta följande obegränsade optimeringsproblem.

$$\min f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1 + x_2$$

Angrip problemet med brantaste lutningsmetoden, med exakt linjesökning. Starta i origo. Utför en fullständig iteration och beräkna den därpå följande sökriktningen. **(2p)**

b) Visa eller motbevisa att mängden

$$X = \{x \in R \mid |x^2 - 4| \leq 1\}$$

är konvex. **(1p)**

Uppgift 6.

Givet problemet

$$\begin{array}{rccccccl} z^* = \min & f_1(x_1) & + & f_2(x_2) & + & f_3(x_3) & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq 21 & \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \in \{1,2,3,4,5\} & \end{array}$$

där funktionerna f_1, f_2 och f_3 antar värden enligt tabellerna nedan.

x_1	1	2	3	4	5
$f_1(x_1)$	30	27	24	21	20

x_2	1	2	3	4	5
$f_2(x_2)$	30	24	17	12	8

x_3	1	2	3	4	5
$f_3(x_3)$	30	17	10	5	3

Lagrange-relaxera det linjära villkoret med multiplikator $u \geq 0$. Formulera det relaxerade problemet och det Lagrange-duala problemet. Välj $u = 1$ och $u = 2$. Vilka starkaste möjliga uppskattningar av z^* fås? **(3p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

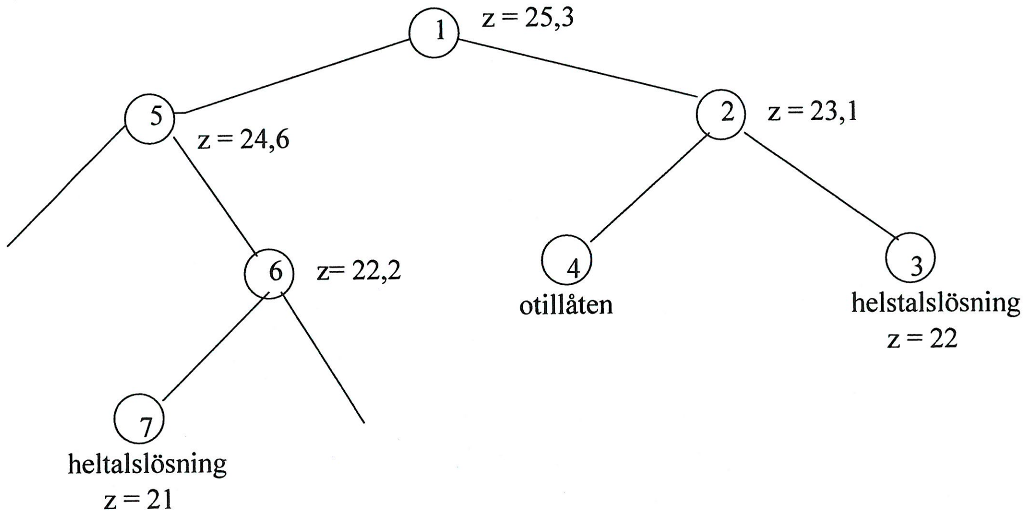
a) Betrakta problemet

$$\begin{array}{rccccccl} \min z = & 40x_1 & + & 100x_2 & + & 150x_3 & & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = 10 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = 20 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0, \end{array}$$

vilket har unikt optimum i $x^* = (6, 2, 0)^T$ med det optimala målfunktionsvärdet $z^* = 440$. Antag att högerledet i det andra bivillkoret ökar från 20 till 21, vilket *inte* kommer att förändra optimalbasen. Då ökar det optimala målfunktionsvärdet med 4 enheter. **(1p)**

b) Vid trädsökning på heltalsproblem används ibland avsökning enligt en så kallad dyk-strategi, vilken innebär att trädet avsöks på djupet innan grenar på högre nivåer skapas och avsöks. Syftet med denna strategi är att snabbt finna bra tillåtna heltalslösningar.

Antag att vi är i färd med att lösa ett linjärt heltalsproblem av maximeringstyp medelst trädsökning med dyk-strategi. Efter några förgreningar har följande, ej färdigavsökta, sökträd erhållits. Nodnumren anger i vilken ordning noderna besökts (för första gången) och vi skall just backa från nod 7 till nod 6, för att skapa och avsöka dess högergren.



Vi vet då att det optimala målfunktionsvärdet för heltalsproblemet är som lägst 22 och som högst 24,6. **(1p)**

c) Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

där $\alpha > 0$, är konkav för $|x| < \alpha$. **(1p)**