Tentamen i TAOP07 Opt grk IV den 18/3-17: korttattade lösningar.

1. Variabler: x_i = antal ton råsand som köps från leverantör i, $i=1,2,3,4$.

Modell: $\min \sum_{i=1}^{4} c_i x_i$

$$\text{då } \sum_{i=1}^{4} x_i = D$$

$$l_k D \leq \sum_{i=1}^{4} a_{ik} x_i \leq u_k D, \quad k=1,2,3$$

$$x_i \leq u_i, \quad i=1,2,3,4$$

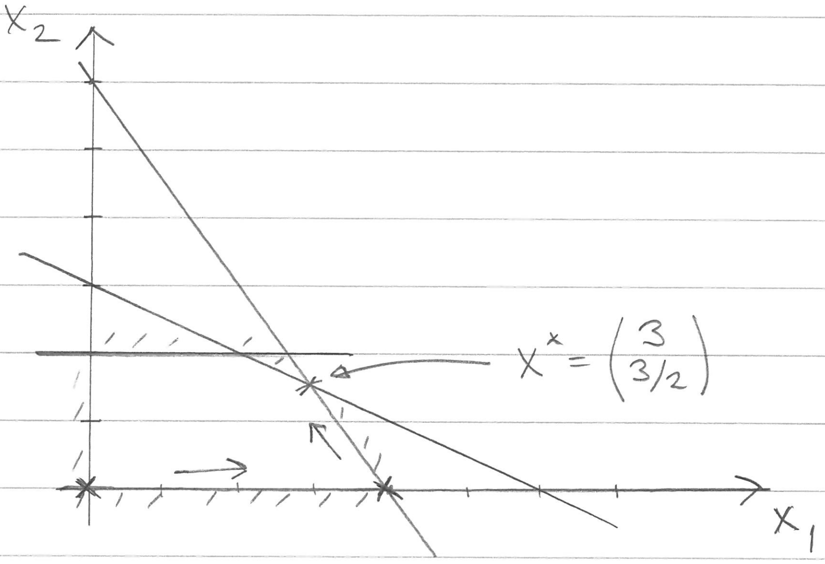
$$x_i \geq 0, \quad i=1,2,3,4$$

2. a) Inför slackvariabler $s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

bas	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	värde	
$-z$	1	5	4	0	0	0	0	x_1 in
s_1	0	3	2	1	0	0	12	s_1 ut
s_2	0	1	2	0	1	0	6	
s_3	0	0	1	0	0	1	2	
$-z$	1	0	2/3	-5/3	0	0	-20	x_2 in
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	4	s_2 ut
s_2	0	0	4/3	-1/3	1	0	2	
s_3	0	0	1	0	0	1	2	

bas	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	värde
$-z$	1	0	0	$-3/2$	$-1/2$	0	-21
x_1	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	0	3
x_2	0	0	1	$-1/4$	$3/4$	0	$3/2$
s_3	0	0	0	$1/4$	$-3/4$	1	$1/2$

Optimum: $x_1^* = 3$, $x_2^* = \frac{3}{2}$ med $z^* = 21$.



b) Dualt problem:

$$\begin{aligned} \min\ v &= 12y_1 + 6y_2 + 2y_3 \\ \text{då}\quad 3y_1 + y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$, $x_2^* < 2$ och komplementaritet ger:

$$\begin{cases} 3y_1^* + y_2^* = 5 \\ 2y_1^* + 2y_2^* + y_3^* = 4 \\ y_3^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 3/2 \\ y_2^* = 1/2 \\ y_3^* = 0 \end{cases}$$

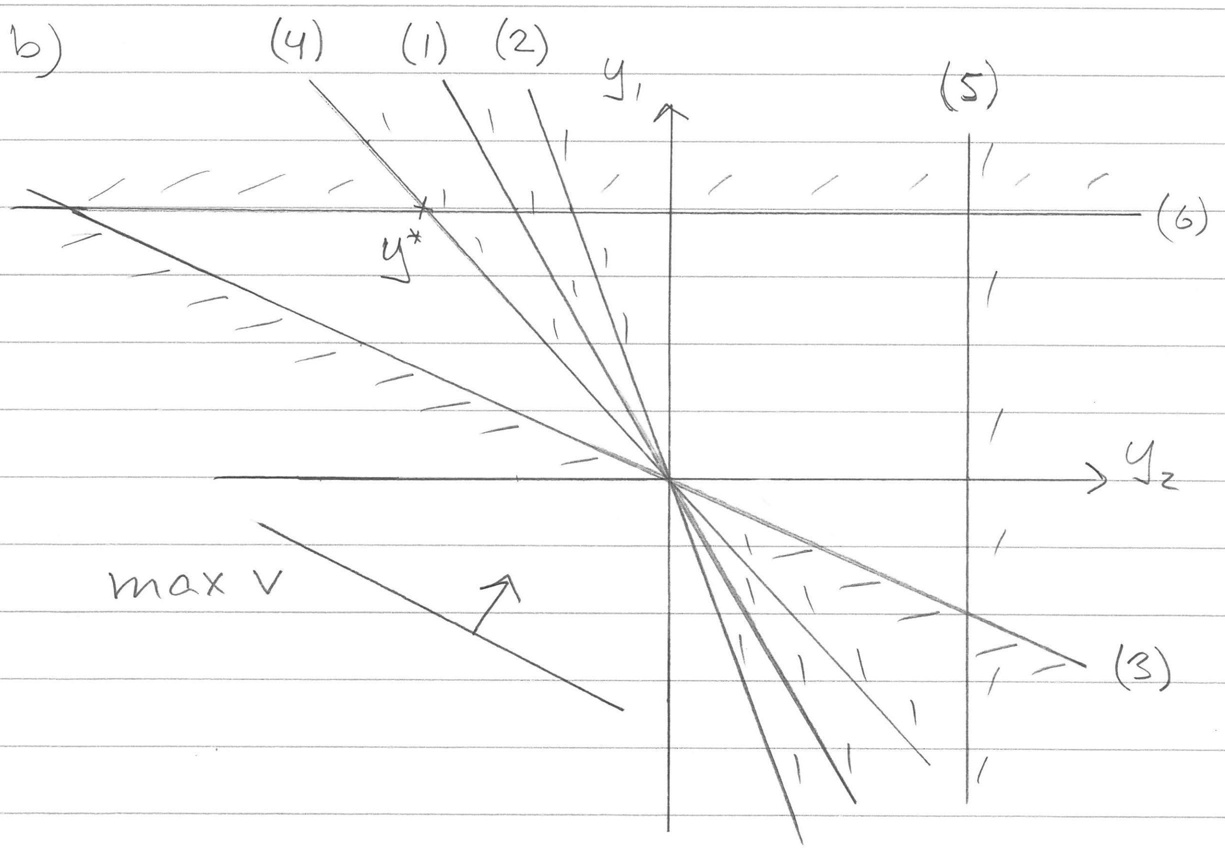
$$\bar{c}_3 = c_3 - y^{*T} A_3 = 7 - \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right)\begin{pmatrix} 8 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix} = -5 - \frac{a_2}{2}$$

x_3^* är inte entydigt bestämd om problemet får alternativa optima, vilket fås då $\bar{c}_3 = 0$, dvs om $a_2 = -10$.

3. a) Dual: $\max\ v = 3y_1 + 5y_2$

$$\text{då} \begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 0 & (1) \\ 3y_1 + y_2 \le 0 & (2) \\ -y_1 - 2y_2 \le 0 & (3) \\ 2y_1 + 2y_2 \le 0 & (4) \\ y_1 \le 1 & (5) \\ y_2 \le 1 & (6) \end{cases}$$

b)



Likhet i (4) och (6) $\Rightarrow y_1^* = -1,\ y_2^* = 1$ med $v^* = 2$.

c) Stark LP-dualitet $\Rightarrow w^* = v^* = 2$.

$w^* = 2 \Rightarrow$ systemet saknar lösning.

[Mha komplementvillkoren fås optimum till fas-1 problemet som $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0$, $x_4^* = 3/2$, $a_1^* = 0$, $a_2^* = 2$, med $w^* = 2$.]

4. a) Studera egenvärdena till Hessianen.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 18x_1 - 18 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 - 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 9(x_1-1) & x_2 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9(x_1-1)-\lambda & x_2 \\ x_2 & x_1-1-\lambda \end{vmatrix} = (9(x_1-1)-\lambda)(x_1-1-\lambda) - x_2^2 = 0$$

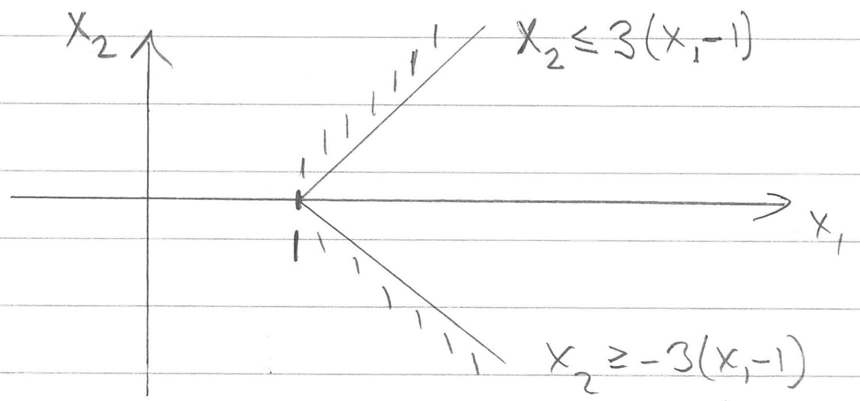
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 5(x_1-1) \pm \sqrt{16(x_1-1)^2 + x_2^2}$$

För att $f(x)$ ska vara konvex: $\lambda_{1,2} \geq 0$

större än eller lika med noll

$$\Leftrightarrow 5(x_1-1) - \sqrt{16(x_1-1)^2 + x_2^2} \quad \Leftrightarrow 9(x_1-1)^2 \geq x_2^2$$

$$\Leftrightarrow -3(x_1-1) \leq x_2 \leq 3(x_1-1)$$



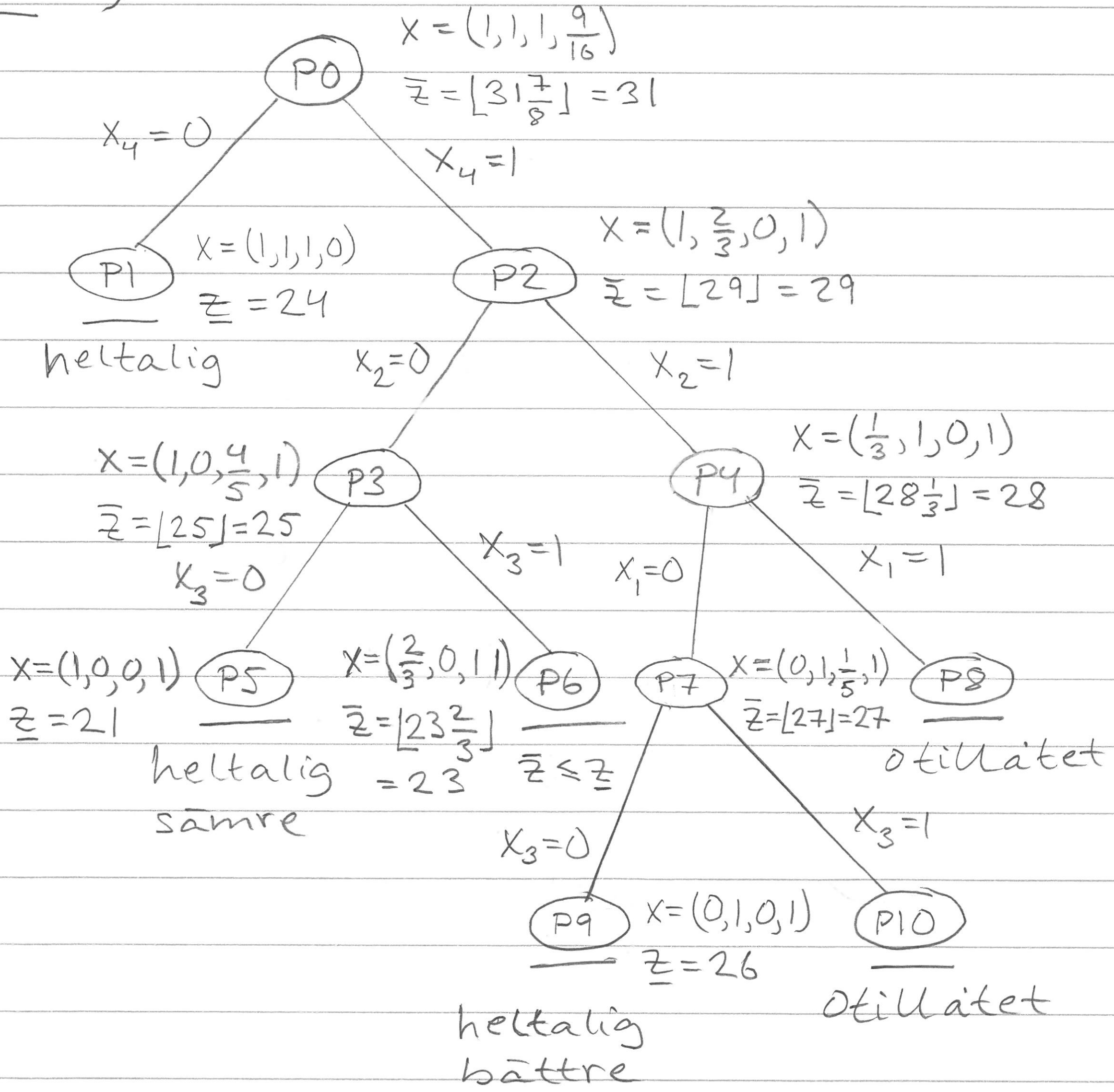
b) $x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + 1 > 0$

Alltså: $\frac{5x_1 + 4x_2 - 1}{x_1 + x_2 + 1} \leq 3 \Leftrightarrow 5x_1 + 4x_2 - 1 \leq 3(x_1 + x_2 + 1)$

$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 \leq 4$

Detta villkor är linjärt och definierar därför en konvex mängd.

5. a)



Avsökningsordning: P0, P1, P2, P3, P5, P6, P4, P7, P9, P10, P8

Optimum: $x^* = (0, 1, 0, 1)$ med $z^* = 26$.

b) Ett villkor är en giltig olikhet för kappsäcksproblemet om varje tillåten 0/1-lösning till detta problem uppfyller villkoret.

$x_2+x_3+x_4 \le 2$ en giltig olikhet?
Antag att $x_2=x_3=x_4=1$. I kappsäcksvillkoret fås då $6+5+16=27 \not\le 23$. Alltså måste varje tillåten 0/1-lösning uppfylla att $x_2+x_3+x_4 \le 2$. Ja, en giltig olikhet.

$x_2+x_4 \le 1$ en giltig olikhet?
Lösningen $x=(0,1,0,1)$ är tillåten $(6+16=22 \le 23)$ men uppfyller inte $x_2+x_4 \le 1$. Nej, inte en giltig olikhet.

$x_1+x_2+x_3+x_4 \le 3$ en giltig olikhet?
Om $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ så bryts kappsäcksvillkoret. Alltså måste en tillåten 0/1-lösning uppfylla $x_1+x_2+x_3+x_4 \le 3$.
Ja, en giltig olikhet.

6. a) Lagrange-relaxerat problem, för $u \ge 0$:

$$h(u)=\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)+ug(x)=\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{x_1^2+x_2^2-2x_1+u(x_1^2+x_2^2-2x_2)\}$$

$$=\min_{x_1\in\mathbb{R}}\{(1+u)x_1^2-2x_1\}+\min_{x_2\in\mathbb{R}}\{(1+u)x_2^2-2ux_2\}$$

$$h(\tfrac{1}{2})=\min_{x_1\in\mathbb{R}}\{\tfrac{3}{2}x_1^2-2x_1\}+\min_{x_2\in\mathbb{R}}\{\tfrac{3}{2}x_2^2-x_2\}$$

De två subproblemen är obegränsade och konvexa.

$$\frac{d}{dx_1}\left\{\frac{3}{2}x_1^2-2x_1\right\}=0 \Rightarrow x_1\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\frac{d}{dx_2}\left\{\frac{3}{2}x_2^2-x_2\right\}=0 \Rightarrow x_2\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow h\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{6} \Rightarrow f^*\geq-\frac{5}{6}$$

$x\left(\tfrac{1}{2}\right)$ tillåten i ursprungliga problemet?

$$g\left(x\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}\leq 0 \Rightarrow \text{ja!}$$

Alltså: $f^*\leq f\left(x\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2}{3}=-\frac{7}{9}$

Slutsats: $f^*\in\left[-\frac{5}{6},-\frac{7}{9}\right]$

b) Enligt ovan fås

$$h(u)=\min_{x_1\in R}\left\{(1+u)x_1^2-2x_1\right\}+\min_{x_2\in R}\left\{(1+u)x_2^2-2ux_2\right\}$$

De två subproblemen är obegränsade och de är konvexa för godtyckligt $u\geq 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(1+u)x_1^2-2x_1\right\}=0 \Rightarrow x_1(u)=\frac{1}{1+u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{(1+u)x_2^2-2ux_2\right\}=0 \Rightarrow x_2(u)=\frac{u}{1+u}$$

$$\Rightarrow h(u) = (1+u)\left(\frac{1}{1+u}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{1+u} + (1+u)\left(\frac{u}{1+u}\right)^2 - 2u\cdot\frac{u}{1+u} =$$

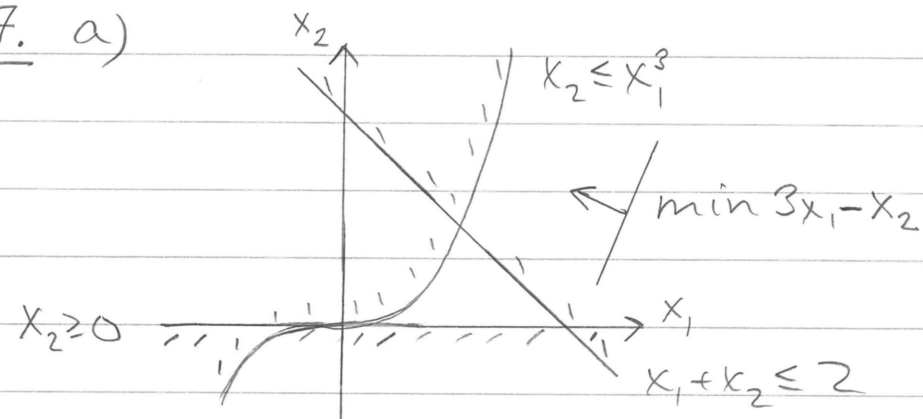
$$= -\frac{1}{1+u} - \frac{u^2}{1+u} = -\frac{1+u^2}{1+u}$$

Lagrange-dualt problem:

$$h^* = \max_{u\geq 0} h(u) = -\frac{1+u^2}{1+u}.$$

[Optimum: $u^* = \sqrt{2}-1$ med $h^* = 2(1-\sqrt{2})$.]

7. a)



Origo är globalt optimum. KKT-punkt?

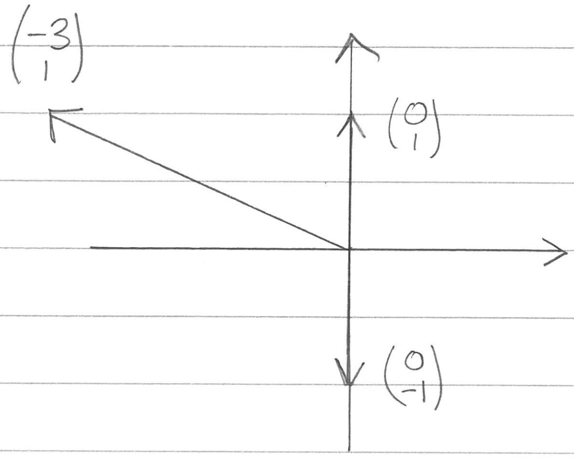
$$g_1(x) = -x_1^3 + x_2 \Rightarrow \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_3(x) = -x_2 \Rightarrow \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_3(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

För att origo ska vara en KKT-punkt ska det finnas $y_1, y_3 \geq 0$ så att

$$-\nabla f(0,0) = y_1 \nabla g_1(0,0) + y_3 \nabla g_3(0,0), \text{ dvs}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$ vilket det inte gör.



Origo är inte en KKT-punkt eftersom de aktiva villkorens normaler är linjärt beroende.

Sant, ty globalt optimum men inte KKT-punkt.

~~Falskt, ty inte KKT-punkt.~~

b) Kontrollera med Bellmans ekvationer.
Bågar går till noder med högre nodnummer, varför noderna redan är numrerade i topologisk ordning och kan avsökas i nodnummerordning.

$y_1 = 0$

$y_2 = \max\{y_1+3\} = 0+3 = 3$ för båge $(1,2)$

$y_3 = \max\{y_1+4, y_2+2\} = \max\{0+4, 3+2\} = 5$
för båge $(2,3)$

$y_4 = \max\{y_2+4, y_3+1\} = \max\{3+4, 5+1\} = 7$
för båge $(2,4)$

$y_5 = \max\{y_2+5, y_3+5, y_4+2\} = \max\{3+5, 5+5, 7+2\} = 10$
för båge $(3,5)$

$y_6 = \max\{y_4+6, y_5+1\} = \max\{7+6, 10+1\} = 13$
för båge $(4,6)$

Uppnystning: till nod 6 från nod 4, till nod 4 från nod 2, till nod från nod 1.

En unik dyraste väg ges av bågarna (1,2), (2,4) och (4,6), med kostnad 13.

Påståendet är falskt.

[Den väg som ges i uppgiften har kostnad $3+2+5+1=11$ och är därför inte dyrast.]

c)

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 + x_2 \\ x_1 + 2(1+x_2) \end{pmatrix} \text{ och } \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ och } \nabla^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Newton-riktningen: $d_N = -\nabla^2 f(0,1)^{-1} \nabla f(0,1) =$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Avtagande riktning?

$$\nabla f(0,1)^T d_N = (1,4)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -6 < 0 \Rightarrow \text{ja!}$$

Påståendet är sant.