Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	18:e mars 2017
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	*Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Ett företag producerar och säljer en välspecificerad sandblanding som tillverkas genom att processera och blanda fyra olika sorters råsand, vilka köps in från fyra olika leverantörer. Leverantör i kan tillhandahålla som mest u_i ton råsand per vecka till en kostnad av c_i kronor per ton, $i = 1, \ldots, 4$.

Varje råsand är i sin tur en blandning av olika grova sandkorn som klassas i tre olika kategorier, vilka indexeras med $k = 1, 2, 3$. Fördelningen av sandkorn mellan dessa kategorier varierar mellan leverantörerna. Den beskrivs med parametrar a_{ik}, vilka anger hur stor viktandel av råsand $i = 1, \ldots, 4$ som utgörs av kategori $k = 1, 2, 3$. Värdena på dessa parametrar ges i tabellen nedan.

Från leverantör	Kategori 1	Kategori 2	Kategori 3
1	0.50	0.30	0.20
2	0.65	0.20	0.15
3	0.40	0.50	0.10
4	0.35	0.40	0.25

Exempel: Ett ton råsand från leverantör 1 innehåller alltså 500 kg sandkorn ur kategori 1, 300 kg sandkorn ur kategori 2 och 200 kg sandkorn ur kategori 3.

Den välspecificerade sandblandningens sammansättning måste uppfylla vissa krav på andelen sandkorn från varje kategori. Företaget har därför specificerat en undre och en övre gräns för *viktandelen* sandkorn från kategori k i sandblandningen. Dessa gränser betecknas l_k respektive u_k, för $k = 1, 2, 3$.

Företaget har en stabil efterfrågan på D ton sandblandning per vecka och önskar sig en linjär optimeringsmodell som minimerar den totala kostnaden för att producera den efterfrågade volymen. Hjälp företaget genom att skriva ner en sådan modell som löser dess problem. **(3p)**

Uppgift 2.

a) Lös följande linjära optimeringsproblem med simplexmetoden.

$$
\begin{array}{llcl}
\max z = & 5x_1 + 4x_2 & & \\
\text{då} & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\
& x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\
& x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 , x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Starta i origo. Illustrera iterationerna grafiskt. **(2p)**

b) Antag att problemet utökas med en variabel x_3 med målfunktionskoefficient $c_3 = 7$ och bivillkorskoefficienter $A_3 = (8, a_2, 3)^T$, där a_2 är en parameter. Finns det något värde på a_2 sådant att optimala värdet på variabeln x_3 *inte* är entydigt bestämt? **(1p)**

Uppgift 3.

För att avgöra om systemet

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 & (1) \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5 & (2) \\
x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0 & (3)
\end{cases}
$$

har en lösning kan man introducera artificiella variabler a_1 och a_2 samt lösa fas-1 problemet

$$
\begin{array}{llcl}
\min w = & a_1 + a_2 & & \\
\text{då} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + a_1 & = & 3 \\
& x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + a_2 & = & 5 \\
& x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , a_1 , a_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

a) Teckna dualen till fas-1 problemet. **(1p)**

b) Lös det duala problemet grafiskt. **(1p)**

c) Utnyttja optimallösningen till det duala problemet för att avgöra om det givna systemet (1) – (3) har någon lösning eller ej. **(1p)**

Uppgift 4.

a) Avgör för vilka $x \in R^2$ som funktionen

$$f(x) = 3x_1^3 + x_1 x_2^2 - 9x_1^2 - x_2^2 + 9x_1 - x_2$$

är konvex. **(2p)**

b) Visa att mängden

$$\left\{ x \in R^2 \;\middle|\; \frac{5x_1 + 4x_2 - 1}{x_1 + x_2 + 1} \leq 3 \text{ och } x_1, x_2 \geq 0 \right\}$$

är konvex. **(1p)**

Uppgift 5.

a) Lös det binära kappsäcksproblemet

$$\begin{array}{llllllllll} \max z = & 7x_1 & + & 12x_2 & + & 5x_3 & + & 14x_4 & & \\ \text{då} & 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 16x_4 & \leq & 23 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1 \end{array}$$

med trädsökning. Använd djup-först-sökning och börja alltid med noll-grenen. **(2p)**

b) Betrakta följande villkor.

$$\begin{array}{lllllllll} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 2 \\ & & & & x_2 & + & x_4 & \leq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \end{array}$$

Är något eller några av dem en giltig olikhet för problemet i deluppgift a ? **(1p)**

Uppgift 6.

Betrakta det ickelinjära problemet

$$\begin{array}{rcl} f^* = \min \; f(x) & = & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \\ \text{då} \; g(x) & = & x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leq 0. \end{array}$$

a) Lagrange-relaxera villkoret med multiplikator $\bar{u} = \frac{1}{2}$ och beräkna en optimistisk skattning av f^*. Fås även en pessimistisk skattning av f^* och i så fall vilken? **(2p)**

b) Teckna ett *explicit* Lagrange-dualt problem, det vill säga ett Lagrange-dualt problem uttryckt i *endast* u. **(1p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Problemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{då} & -x_1^3 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

har globalt optimum i origo, som *inte* är en KKT-punkt. **(1p)**

b) Betrakta problemet att finna en dyraste väg från första noden till sista noden i ett acykliskt riktat nätverk med bågkostnader enligt tabellen nedan.

	till				
från	2	3	4	5	6
1	3	4	-	-	-
2	-	2	4	5	-
3	-	-	1	5	-
4	-	-	-	2	6
5	-	-	-	-	1

En dyraste väg ges av bågarna $(1,2), (2,3), (3,5)$ och $(5,6)$. **(1p)**

c) Newton-riktningen för det obegränsade problemet

$$\min f(x) = x_1^4 + x_1 x_2 + (1 + x_2)^2$$

i punkten $\bar{x} = (0,1)^T$ är en avtaganderiktning. **(1p)**
