Tentamen i TAOP07 Opt grk V den 23/8-16: kortfattade lösningar.

1. Variabler:

x_t = mängd av råvaran (enheter) som köps in i period t, $t=1,\dots,T$

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{om } x_t > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad t=1,\dots,T$$

l_t = mängd av råvaran (enheter) som lagerhålls under period t, $t=0,\dots,T$

Modell:

$$\min \sum_{t=1}^{T} f_t y_t + \sum_{t=1}^{T} c_t x_t + \sum_{t=1}^{T} h_t l_t$$

$$
\begin{aligned}
\text{då } \; & x_t \le u_t y_t, \quad t=1,\dots,T \\
& l_t = l_{t-1} + x_t - d_t, \quad t=1,\dots,T && (1) \\
& l_0 = I_0 && (2) \\
& l_T = I_T && (3) \\
& l_t \le L, \quad t=1,\dots,T \\
& x_t \ge 0, \quad t=1,\dots,T \\
& y_t = 0/1, \quad t=1,\dots,T \\
& l_t \ge 0, \quad t=1,\dots,T
\end{aligned}
$$

Alternativt kan l_t definieras för endast $t=1,\dots,T-1$, vilket ger modellen

$$\min \sum_{t=1}^{T} f_t y_t + \sum_{t=1}^{T} c_t x_t + \sum_{t=1}^{T-1} h_t l_t$$

$$\begin{aligned}
\text{då}\quad & x_t \leq u_t y_t, \quad t=1,\dots,T \\
& l_1 = I_0 + x_1 - d_1 \\
& l_t = l_{t-1} + x_t - d_t, \quad t=2,\dots,T-1 \\
& I_T = l_{T-1} + x_T - d_T \\
& l_t \leq L, \quad t=1,\dots,T-1 \\
& x_t \geq 0, \quad t=1,\dots,T \\
& y_t = 0/1, \quad t=1,\dots,T \\
& l_t \geq 0, \quad t=1,\dots,T-1
\end{aligned}$$

(Observera att de två målfunktionerna är ekvivalenta eftersom $h_T l_T = h_T I_T$ är en konstant.)

2. a) Med x_2 och x_4 som basvariabler fås baslösningen

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7-4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ baslösningen är tillåten!

Komplementär duallösning: $y^T = c_B^T B^{-1} =$

$$= (25, 8) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = (3, 2)$$

Kontrollera de reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna.

$$\bar{c}_1 = c_1 - y^T A_1 = 30 - (3,2)\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix} = 30 - 28 = 2 \geq 0$$

$$\bar{c}_3 = c_3 - y^T A_3 = 29 - (3\ 2)\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} = 29 - 26 = 3 \geq 0$$

$$\bar{c}_5 = c_5 - y^T A_5 = 16 - (3,2)\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = 16 - 15 = 1 \geq 0$$

Alla icke-negativa $\Rightarrow$ baslösningen är även <u>optimal</u>!

b) Duallösningen och de reducerade kostnaderna påverkas inte av en förändring i högerleden i bivillkoren, varför det räcker att studera hur tillåtenheten påverkas.

Baslösning som funktion av $\delta \geq 0$:

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}13-\delta\\5-\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\delta\\5\delta\end{pmatrix}$$

Krav på $\delta \geq 0$ för tillåtenhet:

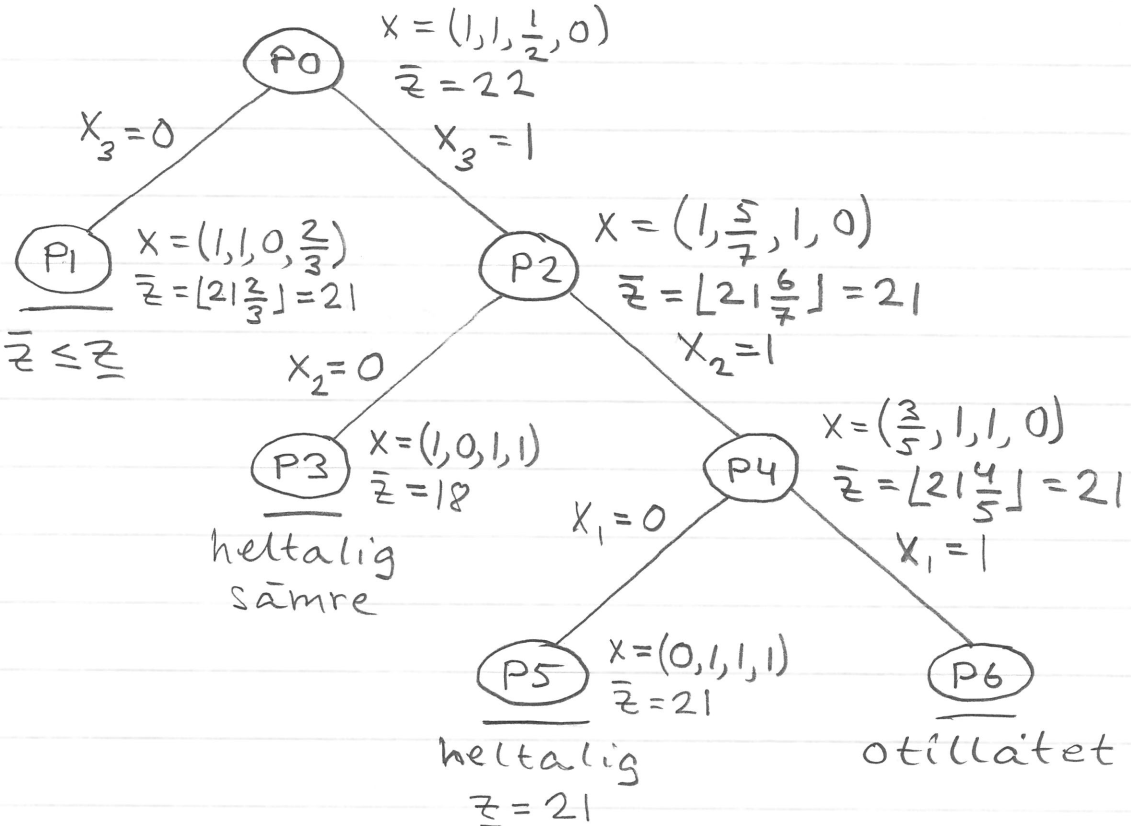
$$1 + \frac{\delta}{3} \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -3 \quad \text{(uppfyllt ty } \delta \geq 0\text{)}$$

$$3 - \frac{5\delta}{3} \geq 0 \Rightarrow \delta \leq \frac{9}{5}$$

Alltså: x_2 och x_4 är optimala basvariabler om och endast om $\delta \leq \frac{9}{5}$.

3\. a) $\frac{8}{5} > \frac{11}{7} > \frac{6}{4} > \frac{4}{3} \Rightarrow$ använd variablerna i ordningen x_1, x_2, x_3, x_4!

$x^*_{LP} = (1, 1, \frac{1}{2}, 0)$ med $z^*_{LP} = 22 \Rightarrow z^* \leq \bar{z} = 22$



Avsökningsordning: P0, P2, P4, P6, P5, P3, P1

Optimum: $x^* = (0, 1, 1, 1)$ med $z^* = 21$.

b) Vilka skär bort LP-optimum?

(i) $x_1 + x_3 = 1 + \frac{1}{2} \nleq 1 \Rightarrow$ ja

(ii) $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} \nleq 2 \Rightarrow$ ja

(iii) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + 0 \leq 3 \Rightarrow$ nej

Vilka är giltiga olikheter?

(i) tex $x=(1,0,1,0)$ är en tillåten lösning men uppfyller <u>inte</u> $x_1+x_3 \leq 1$ $\Rightarrow$ <u>inte</u> en giltig olikhet

(ii) $x_1=x_2=x_3=1$ kan inte gälla i en tillåten lösning, dvs $x_1+x_2+x_3 \leq 2$ måste gälla i en tillåten lösning $\Rightarrow$ giltig olikhet

(iii) $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ kan inte gälla i en tillåten lösning, dvs $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 3$ måste gälla i en tillåten lösning $\Rightarrow$ giltig olikhet

Alltså: endast (ii) är en giltig olikhet som skär bort LP-optimum.

<u>4.</u> a) $\min\ 4x_{12}+3x_{13}-2x_{23}-x_{25}+2x_{34}+5x_{35}-3x_{42}+x_{45}$

$$
\text{då} \begin{cases}
x_{12}+x_{13} = 1 \\
-x_{12}+x_{23}+x_{25}-x_{42} = 0 \\
-x_{13}-x_{23}+x_{34}+x_{35} = 0 \\
-x_{34}+x_{42}+x_{45} = 0 \\
-x_{25}-x_{35}-x_{45} = -1 \\
x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{42}, x_{45} \geq 0
\end{cases}
$$

b) Låt y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 vara dualvariabler för de fem primala likhetsvillkoren. Dualt problem:

$$\max\ y_1 - y_5$$

$$\text{då} \begin{cases} y_1 - y_2 \leq 4 & \\ y_1 - y_3 \leq 3 & \\ y_2 - y_3 \leq -2 & (1) \\ y_2 - y_5 \leq -1 & \\ y_3 - y_4 \leq 2 & (2) \\ y_3 - y_5 \leq 5 & \\ y_4 - y_2 \leq -3 & (3) \\ y_4 - y_5 \leq 1 & \end{cases}$$

c) Av villkoren (1), (2) och (3) följer att $y_2 \leq y_3 - 2 \leq y_4 \leq y_2 - 3 \Rightarrow 0 \leq -3$, vilket innebär att de duala villkoren är motstridiga och att tillåten lösning därför saknas. Eftersom det primala problemet har en tillåten lösning (t ex $x_{13} = x_{35} = 1$ och övriga $x_{ij} = 0$) så måste detta problem då ha obegränsat optimum. (Det primala problemet har obegränsat optimum och det duala problemet saknar tillåten lösning på grund av cykeln $2 \to 3 \to 4 \to 2$, som har den negativa kostnaden $-2 + 2 - 3 = -3$.)

5. a) Problemet kan skrivas som

$$\max\ x_1 x_2$$
$$\text{då } x_1 + x_2^2 - 2 \le 0$$
$$-x_1 \le 0$$
$$-x_2 \le 0$$

KKT-villkor:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (1) \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 & (2) \\ x_1 + x_2^2 - 2 \le 0 & (3) \\ -x_1 \le 0 & (4) \\ -x_2 \le 0 & (5) \\ y_1(x_1 + x_2^2 - 2) = 0 & (6) \\ y_2(-x_1) = 0 & (7) \\ y_3(-x_2) = 0 & (8) \end{cases}$$

För $\bar{x} = \left(\frac{4}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^T$ fås:

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 - 2 = \frac{4}{3} + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - 2 = 0 \Rightarrow$ (3) och (6) OK!

$\bar{x} \ge 0 \Rightarrow$ (4) och (5) OK!

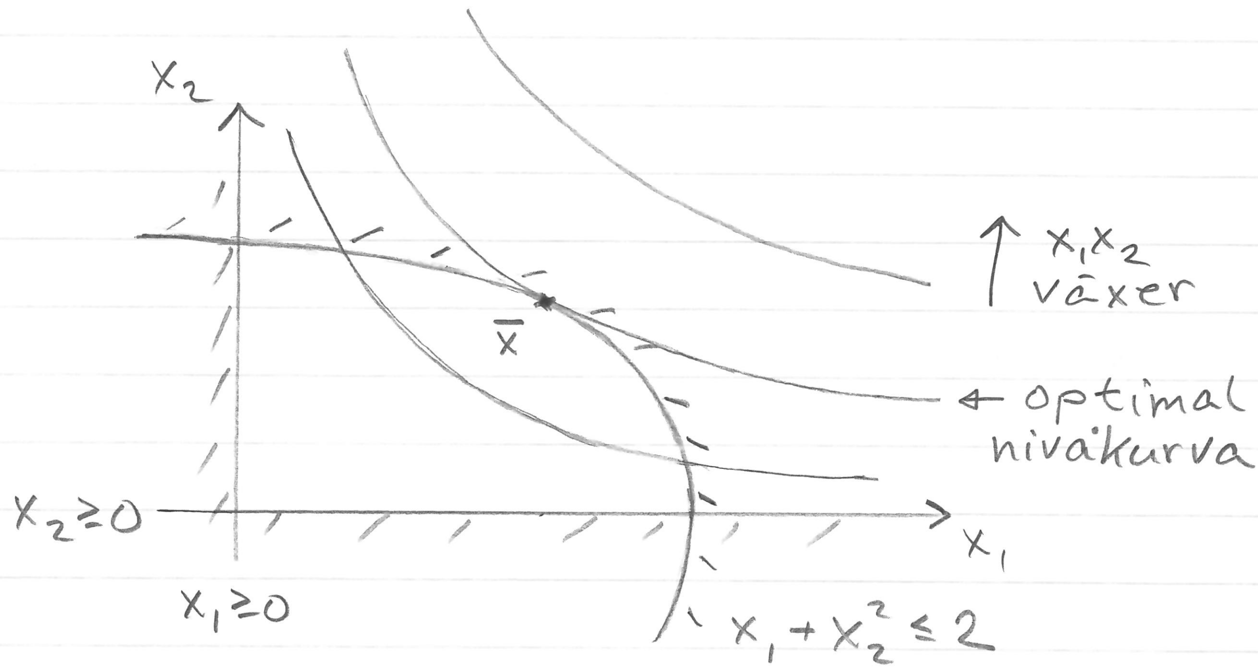
(7) och (8) $\Rightarrow y_2 = y_3 = 0$

$(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$, vilket är uppfyllt för $y_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$!

$y_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y_2 = y_3 = 0$ uppfyller (2)!

Alltså är $\bar{x}$ en KKT-punkt!

b)



Nivåkurvorna för målfunktionen x_1x_2 ges av $x_1x_2 = k$, där $k > 0$ är en konstant, dvs av kurvor $x_2 = \frac{x_1}{k}$.

Av figuren framgår att $\bar{x}$ är ett globalt maximum!

6. Lagrange-relaxerat problem:

$$h(v) = \min\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 +$$
$$+ v_1(1 - x_1 - x_2 - x_5 - x_6) + v_2(1 - x_1 - x_4) +$$
$$+ v_3(1 - x_4 - x_6) + v_4(1 - x_3 - x_5 - x_6)$$
då $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0/1$

$$= \min\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + (5 - v_1 - v_2)x_1 + (3 - v_1)x_2 +$$
$$+ (4 - v_4)x_3 + (6 - v_2 - v_3)x_4 + (7 - v_1 - v_4)x_5$$
$$+ (2 - v_1 - v_3 - v_4)x_6$$
då $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0/1$

Lagrange-dualt problem:

$$h^* = \max_{v \geq 0} h(v).$$

$v = (1, 1, 1, 2)$:

$$h(1,1,1,2) = 5 + \min\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6$$
då $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0/1$

$$= 5 + 2 + 2 = 9 \text{ för } x(1,1,1,2) = (0,1,1,0,0,0)$$

Tillåten lösning? Nej, ty $x_1 + x_4 \neq 1$ och $x_4 + x_6 \neq 1$.

$v=(2,2,4,3)$:

$$h(2,2,4,3) = 11 + \min \; x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 - x_6$$
$$\text{då } x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0/1$$

$= 11+0-1 = 10$ för $x(2,2,4,3) = (0,0,0,1,0,1)$

Tillåten lösning? Ja, ty alla villkor uppfyllda. Målfunktionsvärde: $6+8=14$.

Alltså:

$$\left.\begin{array}{l} z^* \geq 9 \\ z^* \geq 10 \\ z^* \leq 14 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \leq z^* \leq 14$$

7. a) Skriv problemet som

$$\min f(x)$$
$$\text{då } g_j(x) = -x_j \leq 0, \; j=1,\dots,n.$$

Eftersom $\nabla g_j(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← j:te positionen

fås att $\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{n} y_j \nabla g_j(x) = \nabla f(x) - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

KKT-villkoren ges därför av:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} - y_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n & (1) \\ y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n & (2) \\ -x_j \leq 0, \quad j = 1, \ldots, n & (3) \\ y_j(-x_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. & (4) \end{cases}$$

Men: $(1) \& (2) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$

$(1) \& (4) \Leftrightarrow x_j \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$

Alltså kan KKT-villkoren skrivas som

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ x_j \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Påståendet är sant!

b) Studera Hessianens egenvärden.

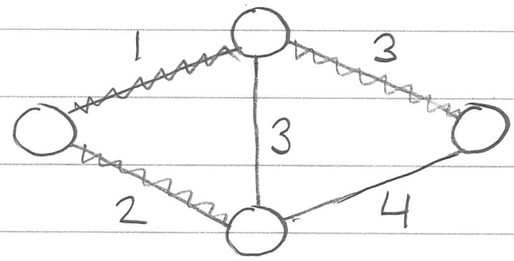
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \log\left(\frac{x}{y}\right)+1 \\ -\frac{x}{y} \end{pmatrix} \text{ och } \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{y} & \frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x}-\lambda & -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{y} & \frac{x}{y^2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{x}-\lambda\right)\left(\frac{x}{y^2}-\lambda\right) - \frac{1}{y^2} =$$

$$= \lambda\left(\lambda - \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

$x, y > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow \nabla^2 f(x,y)$ är positivt semidefinit $\Rightarrow f(x,y)$ är konvex. Påståendet är sant.

c) Betrakta till exempel nätverket nedan.



~~~ : trädbågar

De markerade bågarna utgör ett minimalträd, vilket är unikt trots att bågkostnaderna inte är unika. Påståendet är falskt.
~~~