Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	23:e augusti 2016
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Inga.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Ett företag ska planera sitt inköp av en råvara under en planeringshorisont på T tidsperioder. Om råvaran köps in i tidsperiod $t = 1, \ldots, T$ så fås en fast inköpskostnad på f_t (oberoende av inköpt mängd) plus en rörligt kostnad på c_t per enhet råvara som köps. I tidsperiod $t = 1, \ldots, T$ kan högst u_t enheter av råvaran köpas in. Varje inköp sker i början av en tidsperiod. Åtgången av råvaran i en tidsperiod är $d_t, t = 1, \ldots, T$, och för enkelhets skull kan det antas att förbrukningen sker i början av perioden, direkt efter ett eventuellt inköp. Den råvara som finns kvar efter ett eventuellt inköp samt förbrukning läggs i lager till början av nästa tidsperiod. Detta kostar $h_t, t = 1, \ldots, T$, per enhet av råvaran som lagras. Lagret kan innehålla högst L enheter. Precis före planeringshorisontens början finns I_0 enheter av råvaran i lager. Vid planeringshorisonten slut ska det finnas I_T enheter i lager. Företaget vill minimera sin totala kostnad för inköpen, givet att åtgången på råvaran ska tillgodoses. Formulera en blandad 0/1-modell som beskriver företagets planeringsproblem. **(3p)**

Uppgift 2.

Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\min z = & 30x_1 & + & 25x_2 & + & 29x_3 & + & 8x_4 & + & 16x_5 & & \\
\text{då} & 6x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 13 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 5 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0.
\end{array}
$$

a) Visa att x_2 och x_4 är optimala basvariabler. Simplexmetoden får inte användas. **(2p)**

b) Antag att *båda* högerleden i bivillkoren *minskas* med $\delta \geq 0$. För vilka värden på δ är x_2 och x_4 optimala basvariabler? **(1p)**

Uppgift 3.

a) Lös kappsäcksproblemet

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max z = & 8x_1 & + & 11x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & & \\ \text{då} & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 14 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1 \end{array}$$

med trädsökning. Använd djup-för-sökning och avsök alltid ett-grenen först. **(2p)**

b) Avgör vilket eller vilka av villkoren

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} (i) & x_1 & + & x_3 & \leq & 1 & & & & \\ (ii) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 & & \\ (iii) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \end{array}$$

som är giltiga olikheter som skär bort optimum till LP-relaxationen av det givna problemet. Motivera noga! **(1p)**

Uppgift 4.

Givet ett riktat nätverk med fem noder och bågar enligt tabellen nedan.

från nod	1	1	2	2	3	3	4	4
till nod	2	3	3	5	4	5	2	5
kostnad	4	3	-2	-1	2	5	-3	1

Betrakta problemet att finna en billigaste väg från nod 1 till nod 5.

a) Teckna detta som ett *linjärt* optimeringsproblem. **(1p)**

b) Teckna dess duala problem. **(1p)**

c) Visa att det duala problemet saknar tillåten lösning. Vad innebär detta för det givna billigaste-väg-problemet? **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta det icke-konvexa problemet

$$\begin{array}{llcll} \max & x_1 x_2 & & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2^2 & \leq 2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0. \end{array}$$

a) Visa att $\bar{x} = \left(\frac{4}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^T$ är en Karush-Kuhn-Tucker-punkt för problemet. **(2p)**

b) Avgör om $\bar{x}$ är ett globalt maximum eller ej genom att grafiskt studera det tillåtna området och målfunktionens nivåkurvor. **(1p)**

Uppgift 6.

Givet det linjära 0/1-problemet

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} z^* = \min & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & + & 7x_5 & + & 8x_6 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & \geq & 1 \\ & x_1 & & & & & + & x_4 & & & & & \geq & 1 \\ & & & & & & & x_4 & & & + & x_6 & \geq & 1 \\ & & & & & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & \geq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & = & 0/1. \end{array}$$

Lagrange-relaxera olikhetsvillkoren med multiplikatorer $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \geq 0$. (Konstruera Lagrange-funktionen så att $v \geq 0$ gör att otillåtna lösningar straffas.) Teckna det Lagrange-relaxerade problemet och det Lagrange-duala problemet.

Lös det Lagrange-relaxerade problemet för $v = (1, 1, 1, 2)$ och för $v = (2, 2, 4, 3)$. Vilken är den starkaste möjliga utsagan om z^* som kan göras utifrån de gjorda beräkningarna? **(3p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Antag att funktionen $f : R^n \to R$ är kontinuerligt differentierbar och betrakta optimeringsproblemet

$$\min f(x)$$

$$\text{då} \;\; x_j \geq 0 \; , \; j = 1, \ldots, n.$$

Karush-Kuhn-Tucker-villkoren för detta problem kan uttryckas som

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(1p)

b) Funktionen $f(x,y) = x \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, där $x, y > 0$, är konvex. **(1p)**

c) Ett minimalträd (billigaste uppspännande träd) i ett sammanhängande oriktat nätverk med bågkostnader är *unikt* om och endast om alla bågkostnader är unika (dvs det inte finns några bågar med samma kostnad). **(1p)**