Tentamen i TAOP07 Opt grk $\overline{V}$ den 8/6 -16: kortfattade lösningar.

1. Variabler: x_j = pris som företag B betalar per enhet av resurs R_j, $j=1,2$.

Modell: $\min 2400x_1 + 2100x_2$

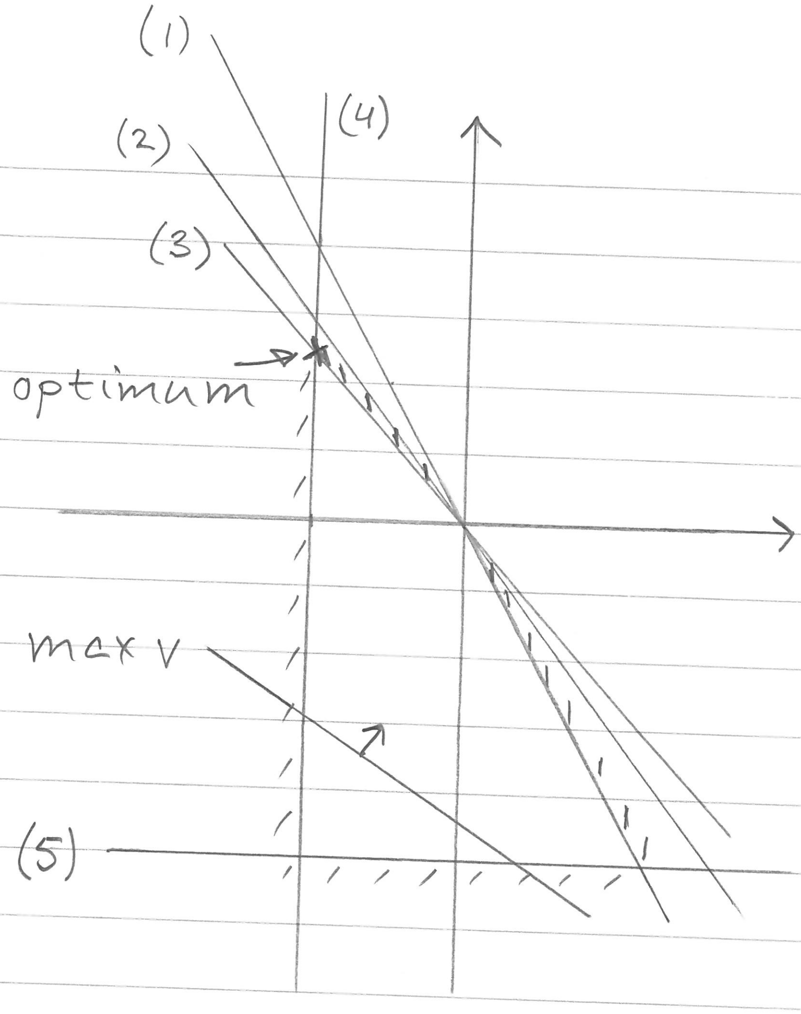
$$\text{då} \begin{cases} 50x_1 + 30x_2 \geq 25 \\ 24x_1 + 33x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 15x_2 \geq 20 \\ x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Villkoren säkerställer att det inte är fördelaktigare för företag A att tillverka P_1, P_2 eller P_3.

2. a) $\max v = 2y_1 + 3y_2$

$$\text{då} \begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 0 & (1) & x_1 \\ 3y_1 + 2y_2 \leq 0 & (2) & x_2 \\ 4y_1 + 3y_2 \leq 0 & (3) & x_3 \\ -y_1 \leq 2 & (4) & x_4 \\ -y_2 \leq 5 & (5) & x_5 \\ y_1, y_2 \text{ fria} \end{cases}$$

b) Observera att (4) och (5) $\Leftrightarrow$ $y_1 \geq -2$ och $y_2 \geq -5$, samt att villkoren (1), (2) och (3) går genom origo.



Optimum ges av:

$$\left.\begin{array}{l} 4y_1^* + 3y_2^* = 0 \\ y_1^* = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1^* = -2 \\ y_2^* = 8/3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$v^* = 2(-2) + 3 \cdot \frac{8}{3} = 4$$

c) Komplemetvillkor:

$$x_1^*(2y_1^* + y_2^*) = 0 \qquad (i)$$
$$x_2^*(3y_1^* + 2y_2^*) = 0 \qquad (ii)$$
$$x_3^*(4y_1^* + 3y_2^*) = 0 \qquad (iii)$$
$$x_4^*(-y_1^* - 2) = 0 \qquad (iv)$$
$$x_5^*(-y_2^* - 5) = 0 \qquad (v)$$

$$y_1^*(2x_1^* + 3x_2^* + 4x_3^* - x_4^* - 2) = 0 \qquad (vi)$$
$$y_2^*(x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* - x_5^* - 3) = 0 \qquad (vii)$$

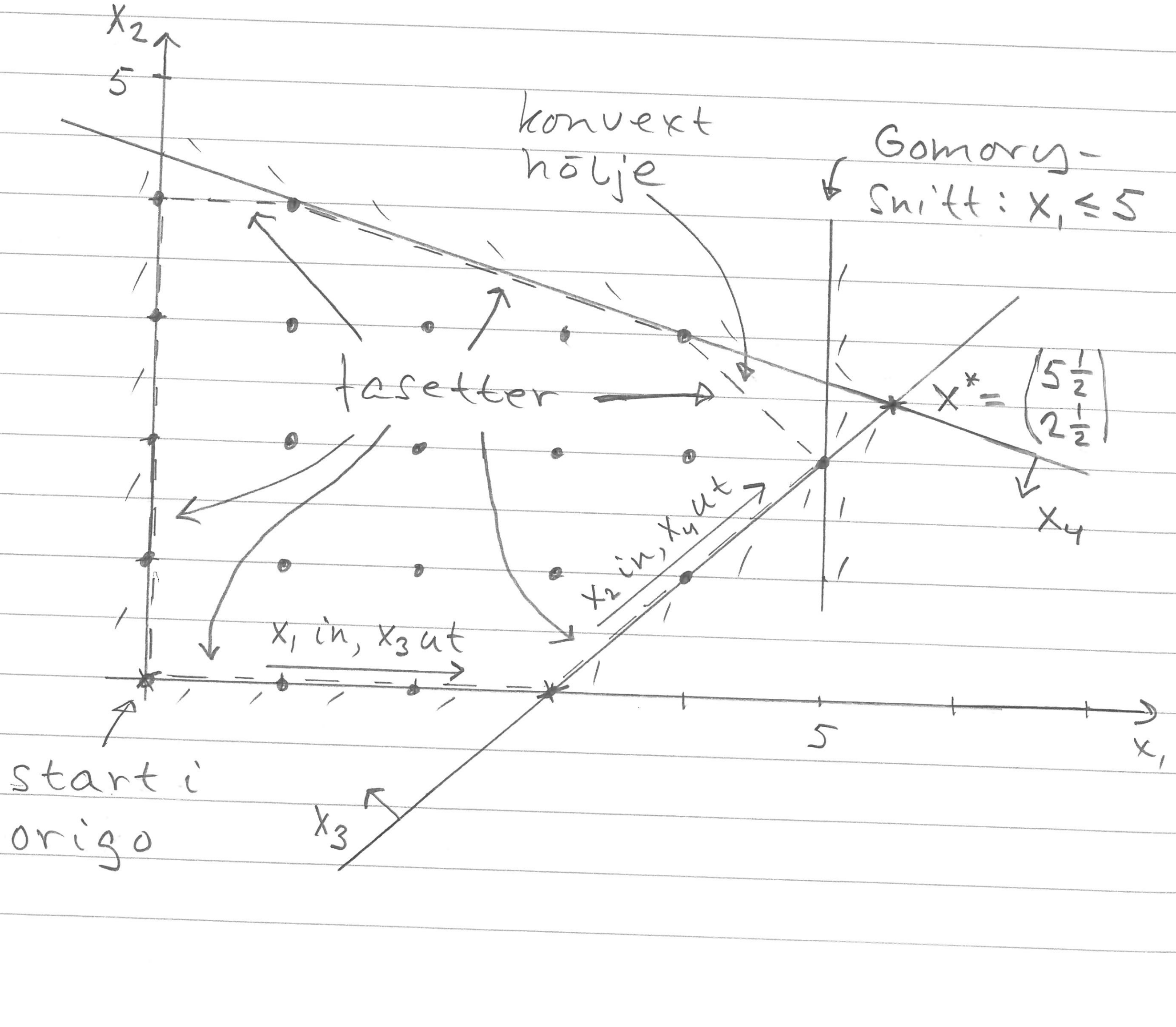
$$\left.\begin{array}{l} (i), (ii), (v) \Rightarrow x_1^* = x_2^* = x_5^* = 0 \\ (vi), (vii) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x_1^* + 3x_2^* + 4x_3^* - x_4^* = 2 \\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* - x_5^* = 3 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^* = x_2^* = x_5^* = 0,\ x_3^* = 1,\ x_4^* = 2 \Rightarrow 2x_4^* + 5x_5^* = 4$$

3. a) Inför slackvariabler $x_3, x_4 \geq 0$.
Efter två simplexiterationer, med x_1 som inkommande basvariabel och x_3 som utgående basvariabel, samt x_2 som inkommande och x_4 som utgående, fås optimaltablån

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	värde
$-z$	1	0	0	-2	-1	-19
x_1	0	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$

Optimum: $x_1^* = 5\frac{1}{2}$, $x_2^* = 2\frac{1}{2}$ med $z^* = 19$.



b) Gomory-snitt:

x_1-raden: $x_1 + \lfloor \frac{3}{4} \rfloor x_3 + \lfloor \frac{1}{4} \rfloor x_4 \le \lfloor 5\frac{1}{2} \rfloor \Rightarrow x_1 \le 5$

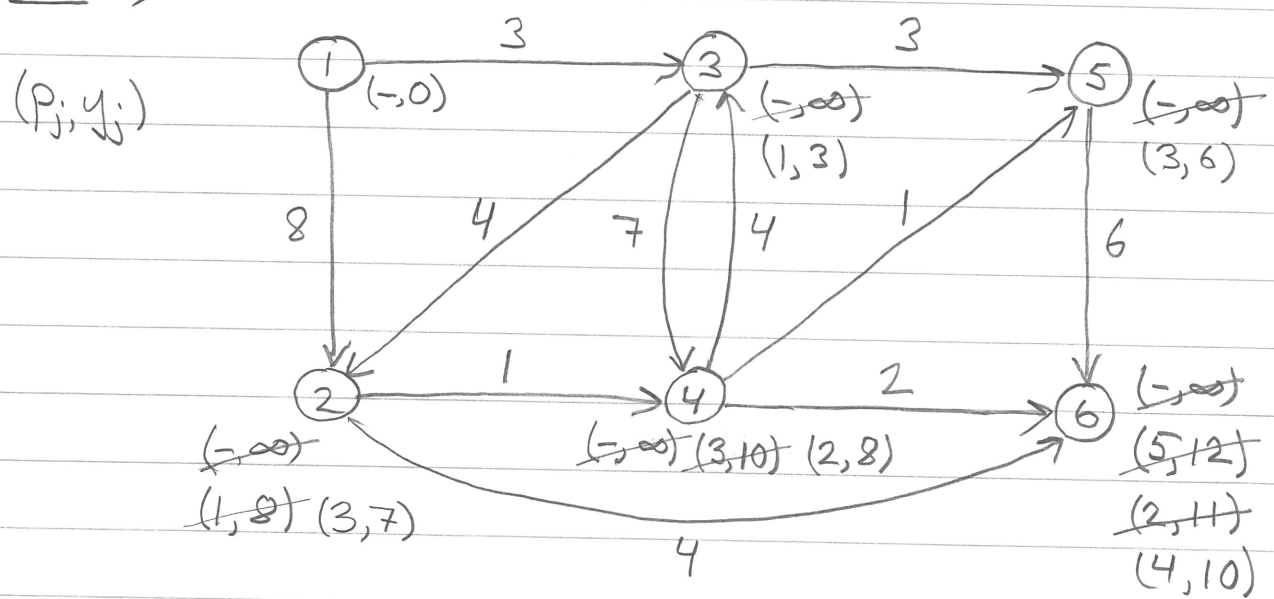
x_2-raden: $x_2 + \lfloor -\frac{1}{4} \rfloor x_3 + \lfloor \frac{1}{4} \rfloor x_4 \le \lfloor 2\frac{1}{2} \rfloor \Rightarrow x_2 - x_3 \le 2$

$\Rightarrow x_2 - (3 - x_1 + x_2) \le 2 \Rightarrow x_1 \le 5$

Gav samma snitt! (Skär bort LP-optimum, men ingen tillåten heltalslösning, vilket alltid ska gälla!)

Definierar __inte__ en fasett till det konvexa höljet av de tillåtna heltalslösningarna eftersom villkoret __inte__ följer en fasett till höljet.

__4.__ a)



Avsökningsordning: 1, 3, 5, 2, 4, 6

Bv: $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 6$ med kostnad 10.

b) Bellmans ekvationer:

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = \min\{y_1+8, y_3+4\}$$
$$y_3 = \min\{y_1+3, y_4+4\}$$
$$y_4 = \min\{y_2+1, y_3+7\}$$
$$y_5 = \min\{y_3+3, y_4+1\}$$
$$y_6 = \min\{y_2+4, y_4+2, y_5+6\}$$

Från deluppgift a: $y=(0,7,3,8,6,10)$.

Kontroll:

$y_1 = 0$ OK
$y_2 = \min\{0+8, 3+4\} = 7$ OK
$y_3 = \min\{0+3, 8+4\} = 3$ OK
$y_4 = \min\{7+1, 3+7\} = 8$ OK
$y_5 = \min\{3+3, 8+1\} = 6$ OK
$y_6 = \min\{7+4, 8+2, 6+6\} = 10$ OK

Stämmer!

c) För ett litet $\delta > 0$ kommer billigaste-väg-trädet att vara oförändrat, men nodpriserna kommer att justeras utifrån hur många bågar som ingår i den billigaste vägen fram till varje nod. Nodpriserna blir alltså $y=(0, 7-2\delta, 3-\delta, 8-3\delta, 6-2\delta, 10-4\delta)$.

Krav på δ för att ingen billigaste väg ska ändras:

nod 2 : $7-2\delta \leq 0+8-\delta$
nod 3 : $3-\delta \leq 8-3\delta+4-\delta$
nod 4 : $8-3\delta \leq 3-\delta+7-\delta$
nod 5 : $6-2\delta \leq 8-3\delta+1-\delta$
nod 6 : $10-4\delta \leq 7-2\delta+4-\delta$
$10-4\delta \leq 6-2\delta+6-\delta$

$\Rightarrow \delta \leq \frac{3}{2}$ för nod 5.

För δ något större än $\frac{3}{2}$ kommer den billigaste vägen till nod 5 att gå via nod 4 och ge nodpriset $y_5 = 9-4\delta$. Den billigaste vägen till nod 6 går dock <u>inte</u> via nod 5 och ändras därför inte.

Krav på δ för att inte någon annan billigaste väg ska ändras:

nod 2: $7-2\delta \leq 0+8-\delta$
nod 3: $3-\delta \leq 8-3\delta+4-\delta$
nod 4: $8-3\delta \leq 3-\delta+7-\delta$
nod 5: $9-4\delta \leq 3-\delta+3-\delta$
nod 6: $10-4\delta \leq 7-2\delta+4-\delta$
$10-4\delta \leq 9-4\delta+6-\delta$

$\Rightarrow \delta \leq 3$ för nod 3.

För $\delta > 3$ kommer den billigaste vägen till nod 3 att gå via nod 4. Eftersom nod 3 ingår i den billigaste vägen till nod 6, så kommer även denna att förändras.

Alltså: den billigaste vägen till nod 6 är oförändrad för $\delta \leq 3$.

(För $\delta > 3$ kommer cykeln $2 \to 4 \to 3 \to 2$ att få negativ kostnad, varför det då inte längre finns någon billigaste väg till nod 6.)

5. a)

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4(x_1-2)^3 + 2(x_1-2)x_2^2 \\ 2(x_1-2)^2 x_2 + 2(x_2+1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4(1-2)^3 + 2(1-2)1^2 \\ 2(1-2)^2 \cdot 1 + 2(1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = x^0 + td^0 = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

$$\varphi(t) = f(x(t)) = (1+t-2)^4 + (1+t-2)^2(1-t)^2 + (1-t+1)^2$$
$$= 2(t-1)^4 + (2-t)^2$$

$$\varphi'(t) = 8(t-1)^3 - 2(2-t)$$

$$\varphi''(t) = 24(t-1)^2 + 2 > 0, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \text{konvext!}$$

$x' = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ det optimale steget

ges av $\begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$

Kontrollera!

$$\varphi'\left(\tfrac{3}{2}\right) = 8\left(\tfrac{3}{2}-1\right)^3 - 2\left(2-\tfrac{3}{2}\right) = 8\cdot\tfrac{1}{8} - 2\cdot\tfrac{1}{2} = 0$$

Stämmer! Alltså: $t_1 = \frac{3}{2}$ och $x' = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

b)
$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12(x_1-2)^2 + 2x_2^2 & 4(x_1-2)x_2 \\ 4(x_1-2)x_2 & 2(x_1-2)^2+2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 12(1-2)^2 + 2\cdot 1^2 & 4(1-2)\cdot 1 \\ 4(1-2)\cdot 1 & 2(1-2)^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^0)^{-1} = \frac{1}{14\cdot 4 - (-4)^2}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$-\nabla^2 f(x^0)^{-1}\nabla f(x^0) = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = x^0 + td' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

$$\varphi(t) = (1-2)^4 + (1-2)^2(1-t)^2 + (1-t+1)^2 =$$

$$= 1 + (1-t)^2 + (2-t)^2$$

$$\varphi'(t) = -2(1-t) - 2(2-t) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}$$

$$\varphi''(t) = 2 + 2 = 4 > 0 \Rightarrow \text{minimum!}$$

$$t_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>6.</u> Lagrange-relaxerat problem:

$$\begin{aligned} h(v) = \min\ & 21x_1 + 26x_2 + 29x_3 + 30x_4 + 31x_5 + 35x_6 \\ & + v(10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 7x_5 + 6x_6 - 24) \\ \text{då}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ & x_j = 0/1,\ j = 1, \ldots, 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = -24v + \min\ & (21+10v)x_1 + (26+8v)x_2 + (29+7v)x_3 \\ \text{då}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 = 0/1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \min\ & (30+9v)x_4 + (31+7v)x_5 + (35+6v)x_6 \\ \text{då}\ & x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ & x_4, x_5, x_6 = 0/1 \end{aligned}$$

Lagrange-dualt problem:

$$h^* = \max_{v \geq 0} h(v).$$

För varje $v \geq 0$ gäller att $h(v) \leq z^*$.

<u>$v = 1$:</u> $h(1) = -24 + \min\ 31x_1 + 34x_2 + 36x_3$

då $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 = 0/1$

$+ \min\ 39x_4 + 38x_5 + 41x_6$

då $x_4 + x_5 + x_6 = 1$

$x_4, x_5, x_6 = 0/1$

$= -24 + 31 + 34 + 38 = 79 \Rightarrow z^* \geq 79$

$\uparrow$

$x(1) = (1,1,0,0,1,0)$

$x(1)$ tillåten? $10 + 8 + 7 = 25 \not\leq 24 \Rightarrow$ nej!

<u>$v = 3$:</u> $h(3) = -72 + \min\ 51x_1 + 50x_2 + 50x_3$

då $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 = 0/1$

$+ \min\ 57x_4 + 52x_5 + 53x_6$

då $x_4 + x_5 + x_6 = 1$

$x_4, x_5, x_6 = 0/1$

$= -72 + 50 + 50 + 52 = 80 \Rightarrow z^* \geq 80$

$\uparrow$

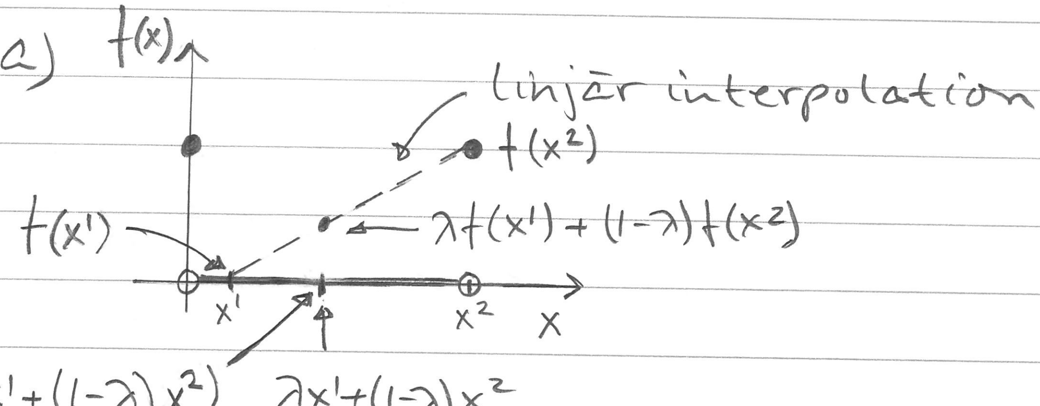
$x(3) = (0,1,1,0,1,0)$

$x(3)$ tillåten? $8 + 7 + 7 = 22 \leq 24 \Rightarrow$ ja!

Målfunktionsvärde: $26+29+31=86$.
Alltså: $z^* \leq 86$.

Slutsats: $80 \leq z^* \leq 86$.

7. a)



Oavsett hur man väljer $x^1, x^2 \in [0,1]$ och $\lambda \in [0,1]$ så kommer $f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2) \leq$ $\leq \lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2)$ gälla $\Rightarrow$ funktionen är konvex på $[0,1]$. Sant!

b) Är punkten tillåten?

$0+2+6+0+5=13$ OK
$0-2+8+0+2=8$ OK
$0-2+6-0+1=5$ OK

$(0,1,2,0,1) \geq 0$ OK

Ja, den är tillåten!

En baslösning ska innehålla högst m variabler med positiva värden.

Här: $m = 3$ och $x_2, x_3, x_5 \geq 0$. Stämmer!

Dessutom ska en tillåten baslösning vara den unika lösningen till systemet $Bx_B = b$, dvs ges av $x_B = B^{-1}b$.

$$\text{Här: } B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_5 \end{matrix} \end{array}.$$

Men: $\det(B) = 0 \Rightarrow B^{-1}$ finns inte.

[Tex: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ kolumnerna i

B är linjärt beroende $\Rightarrow \det(B) = 0$.]

Alltså: punkten är inte en tillåten baslösning. Falskt!

c)

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \\ \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{pmatrix} \text{ och } \nabla^2 f(x) = \frac{1}{4\sqrt{x_1 x_2}} \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1} & 1 \\ 1 & -\frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4\sqrt{x_1 x_2}} > 0 \Rightarrow$ påverkar inte vilka

tecken som egenvärdena till $\nabla^2 f(x)$ har.

$$\begin{vmatrix} -\frac{x_2}{x_1}-\lambda & 1 \\ 1 & -\frac{x_1}{x_2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{x_2}{x_1}-\lambda\right)\left(-\frac{x_1}{x_2}-\lambda\right)-1 =$$

$$= 1+\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}\right)\lambda+\lambda^2-1 = \lambda\left(\lambda+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}\right)=0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = -\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}\right)$

$x_1, x_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \leq 0 \Rightarrow D^2 f(x)$ är negativt semidefinit.

Alltså: $f(x)$ konkav för $x_1, x_2 > 0$.

Sant!