Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	18:e mars 2016
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Inga.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

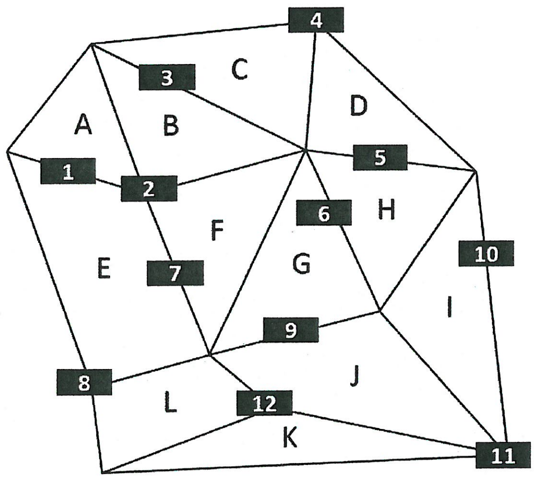
Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Denna uppgift syftar till att hjälpa till med planeringen av hur första-hjälpen-utrustning ska placeras vid en festival. Nedanstående figur ger en schematisk bild av festivalområdet och dess delområden A-L. Rutorna som är numrerade med 1 till 12 representerar möjliga positioner att placera första-hjälpen-utrustning på, och om en sådan ruta tangerar kanten till ett delområde så innebär det att utrustningen är tillgänglig för det delområdet.

Festivalarrangören vill, av kostnadsskäl, placera ut så få enheter första-hjälpen-utrustning som möjligt med hänsyn till kravet att alla delområden ska ha tillgång till utrustning.



a) Introducera variabeln

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{om utrustning placeras vid position } i, \; i = 1, \ldots, 12, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

och formulera en *linjär* heltalsmodell för problemet att välja vid vilka positioner som utrustning ska placeras. **(1p)**

b) Studera samma typ av problemställning som i deluppgift **a**, men här ska du ge en generell modell, oberoende av det exakta utseendet på kartan. Du har tillgång till följande notation (och motsvarande data) och väljer själv vilken du behöver använda i din formulering. Låt K vara mängden av delområden, låt I vara mängden av möjliga positioner, låt O_i vara de delområden som täcks av position $i \in I$, och låt P_k vara de positioner som täcker delområde $k \in K$. Ytterligare notation i form av parametrar eller mängder får ej införas. **(1p)**

c) Arrangören vill bemanna med sjukvårdspersonal någonstans på festivalområdet. Man har sett att det finns lämpliga platser för detta i form av par av positioner där första-hjälpen-utrustning kan placeras. (Detta motiveras av att dessa par av positioner ligger nära varandra och det är lämpligt att ha sjukvårdspersonalen stationerad mellan dessa positioner.) Låt mängden IJ innehålla par av positioner (i, j) sådana att $i \in I$ och $j \in I$. Utöka din modell från deluppgift **b** till att innehålla kravet att första-hjälpen-utrusning ska placeras i båda positionerna i minst ett av paren i mängden IJ (vilket i sin tur ger minst en lämplig plats att placera sjukvårdspersonal på). **(1p)**

Uppgift 2.

Betrakta följande linjära optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcr}
z^* = & \max & z & = & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & \\
 & \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & \leq & 12 & \\
 & & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 & \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 9 & \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Teckna det duala problemet. **(1p)**

b) Betrakta de tre *primala* punkterna $(1, 2, 1)$, $(3, 0, 0)$ och $(2, 2, 0)$ samt de tre *duala* punkterna $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$ och $(1, 1, 0)$. Vilken är den starkaste möjliga utsagan som kan göras om värdet z^* med hjälp av endast dessa punkter? Motivera noga! **(2p)**

Uppgift 3.

Denna uppgift handlar om följande tre problem, där M är ett stort positivt tal.

$$
\begin{array}{llll}
\text{(PA)} & \max z_A = 2x_1 + 3x_2 & \text{(PB)} & \max z_B = 2x_1 + 3x_2 \\
& \text{då} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 & & \text{då} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 11 & & \quad x_2 \leq 1 \\
& \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} & & \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \max z = & 2x_1 + 3x_2 + 6(1-y) + 2y \\
& \text{då} & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& & 2x_1 + 2x_2 \leq 11 + My \\
& & x_2 \leq 1 + M(1-y) \\
& & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \\
& & y \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

I deluppgift **b** är det bra att veta att för (PB) gäller att $x^* = (8, 0)$ med $z_B^* = 16$.

a) Använd trädsökning (Land-Doig-Dakins algoritm) för att lösa problem (PA). Använd djup-först-sökning och avsök $\leq$-grenen först. Om det finns mer än en variabel med fraktionellt värde, förgrena över den variabel som har lägst index. Lös subproblemen grafiskt. **(2p)**

b) Studera problem (P) för heltaliga värden på y. Rita **en** figur med avseende på variablerna x_1 och x_2 och markera i denna figur de tillåtna heltalslösningarna med avseende på x_1 och x_2. För problem (P), ange vilken lösning som är optimal och ange denna lösnings målfunktionsvärde. **(1p)**

Uppgift 4.

a) Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = x_1^4 + x_1 x_2 + (1 + x_2)^2.$$

Avgör för vilka värden på x_1 och x_2 som funktionen $f(x)$ är konvex. **(1p)**

b) I punkten $\bar{x} = (0,0)^T$ utgör Newton-riktningen $\bar{d}_N = -\nabla^2 f(\bar{x})^{-1} \nabla f(\bar{x})$ *inte* en avtaganderiktning. Avgör om Newton-Marquardt-riktningen, som ges av $\bar{d}_{NM} = -(\nabla^2 f(\bar{x}) + \nu I)^{-1} \nabla f(\bar{x})$, är en avtaganderiktning för valet $\nu = 1$. **(1p)**

c) Betrakta det generella problemet

$$\min_{x \in R^n} f(x),$$

där $f \in C^2$, och något givet $\bar{x} \in R^n$.

Visa att en Newton-Marquardt-riktning i punkten $\bar{x}$ ges av en Karush-Kuhn-Tucker-punkt till det riktningsbestämmande problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d \\ \text{då} & \frac{1}{2} \|d\|_2^2 \le r, \end{array}$$

för ett lämpligt valt värde på r. (Här är $\|d\|_2^2 = d^T d$.) **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta problemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & x_1 & - & x_2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \le & 8 \\ & -(x_1 - 4)^2 & + & 4x_2 & \le & 4 \\ & x_1 & , & x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

och punkten $\bar{x} = (6,2)^T$.

a) Bestäm *alla* tillåtna riktningar i punkten $\bar{x}$. **(1p)**

b) Avgör om det finns någon tillåten avtaganderiktning i $\bar{x}$ eller inte. **(1p)**

c) Avgör om $\bar{x}$ är ett lokalt minimum eller inte. Motivera noga! **(1p)**

Uppgift 6.

Givet ett oriktat nätverk med sex noder och de bågkostnader som ges i tabellen nedan.

	nod				
nod	2	3	4	5	6
1	13	6	7	1	2
2	-	6	1	6	7
3	-	-	6	4	3
4	-	-	-	8	11
5	-	-	-	-	7

Betrakta problemet att finna ett minimalträd (billigaste uppspännande träd) i detta nätverk under sidovillkoret att *högst tre* bågar *mellan* nodmängderna $\{1, 2, 3\}$ och $\{4, 5, 6\}$ får inkluderas i trädet. Formulera sidovillkoret matematiskt. Definera de beteckningar som införs! Lagrange-relaxera sidovillkoret med multiplikatorvärdet $v = 1$ och lös det relaxerade problemet med lämplig metod. Upprepa med $v = 6$. Vilken är den starkaste möjliga utsagan om det optimala målfunktionsvärdet för det sidovillkorsbegränsade minimalträdsproblemet som kan göras utifrån de gjorda beräkningarna? **(3p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera svaret!

a) Det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z^* = \max & z & = & x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \\ & \text{då} & x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 13 \\ & & x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & \leq & 17 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

har obegränsat optimum (dvs $z \to +\infty$). **(1p)**

b) Om man för funktionen

$$f(x) = x_1^4 + 5x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 8x_1 - 2x_2$$

gör en exakt linjesökning (endimensionell sökning) från punkten $\bar{x} = (0,0)^T$ i riktningen $\bar{d} = (1,1)^T$ så kommer det optimala steget att vara strikt större än ett. **(1p)**

c) Funktionen $f(x) = ln(x^2 + 1)$, där $x \in R$, är konkav då $|x| \leq 1$. **(1p)**