Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	25 augusti 2015
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Inga.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Ett företag tillverkar två produkter, kallade P_1 och P_2. Tillverkningen kräver tre råvaror, kallade R_1, R_2 och R_3. I tabellen nedan ges hur många ton av varje råvara som krävs per tillverkat ton av varje produkt.

	Produkt	
Råvara	P_1	P_2
R_1	2	1
R_2	1	1
R_3	1	0

Det finns 1500, 1200 och 500 ton att tillgå av råvarorna R_1, R_2 respektive R_3.

Företaget vill maximera intäkten från försäljnngen av de två produkterna. Intäkten per försålt ton av P_1 eller P_2 är dock osäker. Man förutser tre möjliga scenarier för försäljningspriserna per ton av produkterna, enligt tabellen nedan.

	Pris per ton	
Scenario	P_1	P_2
1	15	10
2	10	15
3	12	12

Man utgår från att ett av dessa pris-scenarier kommer att realiseras, och vill planera sin produktion av P_1 och P_2 så att intäkten blir så hög som möjligt *oavsett* vilket pris-scenario som realiseras, det vill säga så att det sämsta möjliga utfallet bland de tre scenarierna ger så hög intäkt som möjligt.

Formulera företagets frågeställning som ett *linjärt* optimeringsproblem. **(3p)**

Uppgift 2.

Antag att ett linjärt optimeringsproblem har ställts upp så att det kan lösas med simplexmetoden. Problemet har fyra bivillkor och sex variabler, kallade $x_1, \ldots, x_6$, varibland de fyra sista är slackvariabler. Målfunktionen ges av

$$\max \text{ z} = 4x_1 + 3x_2$$

.

Problemet har följande baslösningar, bland andra.

$$\begin{array}{rlcl}
a: & (x_3, x_4, x_5, x_6) & = & (100, 150, 175, 480) \\
b: & (x_2, x_3, x_5, x_6) & = & (150, 100, 25, 180) \\
c: & (x_2, x_3, x_4, x_6) & = & (175, 100, -25, 130) \\
d: & (x_1, x_4, x_5, x_6) & = & (100, 150, 75, 80) \\
e: & (x_1, x_2, x_4, x_5) & = & (100, 40, 110, 35) \\
f: & (x_1, x_2, x_3, x_6) & = & (25, 150, 75, 80) \\
g: & (x_1, x_2, x_3, x_5) & = & (45, 150, 55, -20) \\
h: & (x_1, x_2, x_3, x_4) & = & (65, 110, 35, 40)
\end{array}$$

Den sista baslösningen är optimal. Betrakta följande sekvenser av baslösningar.

$$\begin{array}{ll}
i) & a - e - f - h \\
ii) & a - b - f - h \\
iii) & e - d - a - b - f - h \\
iv) & a - b - c - f - h \\
v) & a - d - e - h \\
vi) & a - b - g - h
\end{array}$$

Avgör utifrån den tillgängliga informationen vilken eller vilka av dessa sekvenser av baslösningar som skulle kunna uppträda om problemet angrips med simplexmetoden (eventuellt efter att fas 1 först använts) och vilken eller vilka av sekvenserna som säkert *inte* kan uppträda. Motivera noga! **(3p)**

Uppgift 3.

Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \min & z = & 18x_1 & + & 6x_2 & + & 15x_3 & + & 24x_4 & \\ \text{då} & & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & \geq 7 \\ & & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \geq 4 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0. \end{array}$$

a) Teckna det duala problemet och lös det grafiskt. **(1p)**

b) Teckna komplementvillkoren och använd dessa för att bestämma *alla* optimallösningar till det givna problemet. **(2p)**

Uppgift 4.

Lös följande linjära heltalsproblem med hjälp av trädsökning. De LP-relaxationer som uppkommer får lösas grafiskt. Förgrena från den mest fraktionella variabeln, avsök mindre-än-grenen först och använd djup-först-sökning.

$$\begin{array}{rcrcrcl} z^* = \max z = & & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 12x_1 & + & 4x_2 & \leq & 45 \\ & & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq & 35 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \text{ och heltal} \end{array}$$

Illustrera lösningsgången med tydliga figurer i (x_1, x_2)-rummet och med sökträdet. **(3p)**

Uppgift 5.

Betrakta den olinjära funktionen

$$f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2.$$

a) Visa att $\bar{d} = (2, -1)^T$ är en avtaganderiktning för funktionen $f(x)$ i punkten $\bar{x} = (0, 3)^T$. **(1p)**

b) Avgör om det optimala steget från punkten $\bar{x}$ i riktningen $\bar{d}$ är mindre än, större än, eller lika med, 1. Motivera noga! **(1p)**

c) Beräkna Newton-riktningen i $\bar{x}$. **(1p)**

Uppgift 6.

Givet ett oriktat nätverk med sju noder och bågkostnader enligt tabellen nedan.

	nod					
nod	2	3	4	5	6	7
1	1	6	2	7	16	14
2	-	3	4	11	9	15
3	-	-	5	9	12	13
4	-	-	-	10	17	18
5	-	-	-	-	21	19
6	-	-	-	-	-	20

a) Finn ett billigaste uppspännande träd (minimalträd) i detta nätverk. **(1p)**

b) Antag att bland de bågar som har en kostnad som är *högst* 9 (dvs bågarna $(1,2), \ldots, (3,4), (3,5)$) får som mest tre stycken inkluderas i det billigaste uppspännande trädet. Formulera detta sidovillkor matematiskt. Definiera införda beteckningar! Lagrange-relaxera sidovillkoret med multiplikator $v = 4$ och lös det relaxerade problemet. Vilken är den starkaste möjliga utsagan om optimum till det sidovillkorsbegränsade problemet som kan göras utifrån de gjorda beräkningarna? **(2p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera svaret!

a) Antag att LP-relaxationen av ett linjärt heltalsproblem lösts med simplexmetoden och att optimaltablån bland annat innehåller raden

$$-\frac{4}{3}x_2 + \frac{8}{3}x_4 + x_6 + \frac{4}{3}x_8 = \frac{17}{3}.$$

Då måste varje tillåten lösning till heltalsproblemet uppfylla villkoret

$$-2x_2 + 2x_4 + x_6 + x_8 = 5.$$

(1p)

b) Funktionen $f(x) = e^{-1/x}$, där $x > 0$, är konvex. **(1p)**

c) Problemet

$$\begin{array}{llcccc} \max & f(x) & = & (x_1 + x_2)^2 & + & 2(x_1 - x_2)^2 \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq 1 & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

har en Karush-Kuhn-Tucker-punkt och ett lokalt maximum i

$$x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T.$$

. **(1p)**