Tentamen TAOP07 Opt grk Y den 24 augusti 2010: svar och kortfattade lösningar.

1. Variabler:

t_j = tid som strålkällan placeras i position j, $j=1,\dots,n$

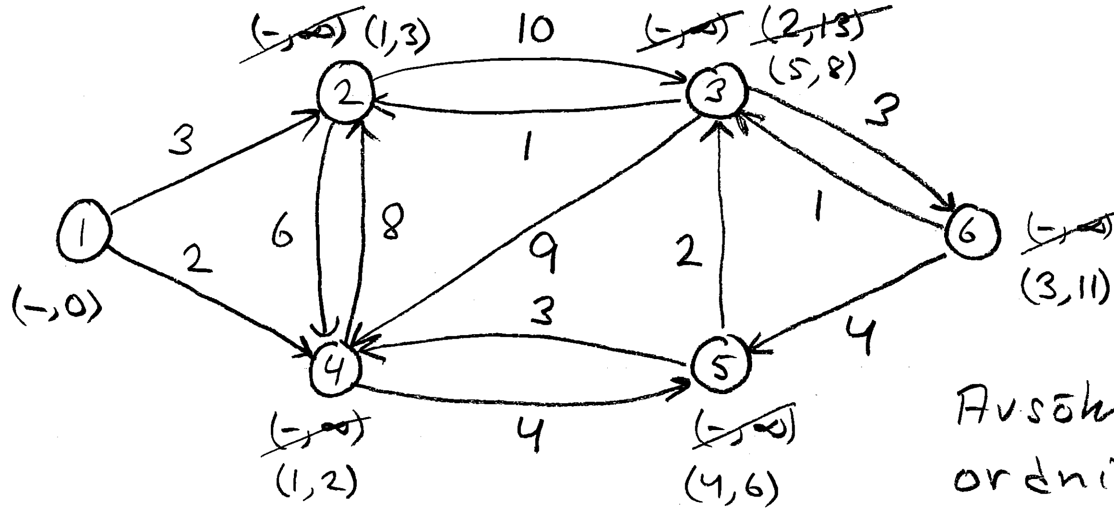
w_i^+ = hur mycket som stråldosen till voxel i överskrider gränsen u_i

w_i^- = hur mycket som stråldosen till voxel i underskrider gränsen l_i

Modell:
$$\min \sum_{i=1}^{m} (p_i^u w_i^+ + p_i^l w_i^-)$$

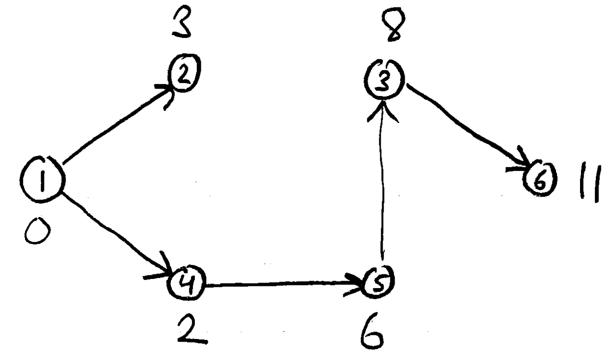
då
$$\begin{cases} w_i^+ \geq \sum_{j=1}^{n} d_{ij} t_j - u_i \\ w_i^- \geq l_i - \sum_{j=1}^{n} d_{ij} t_j \\ w_i^+, w_i^- \geq 0, \quad i=1,\dots,m \end{cases}$$

2. a)



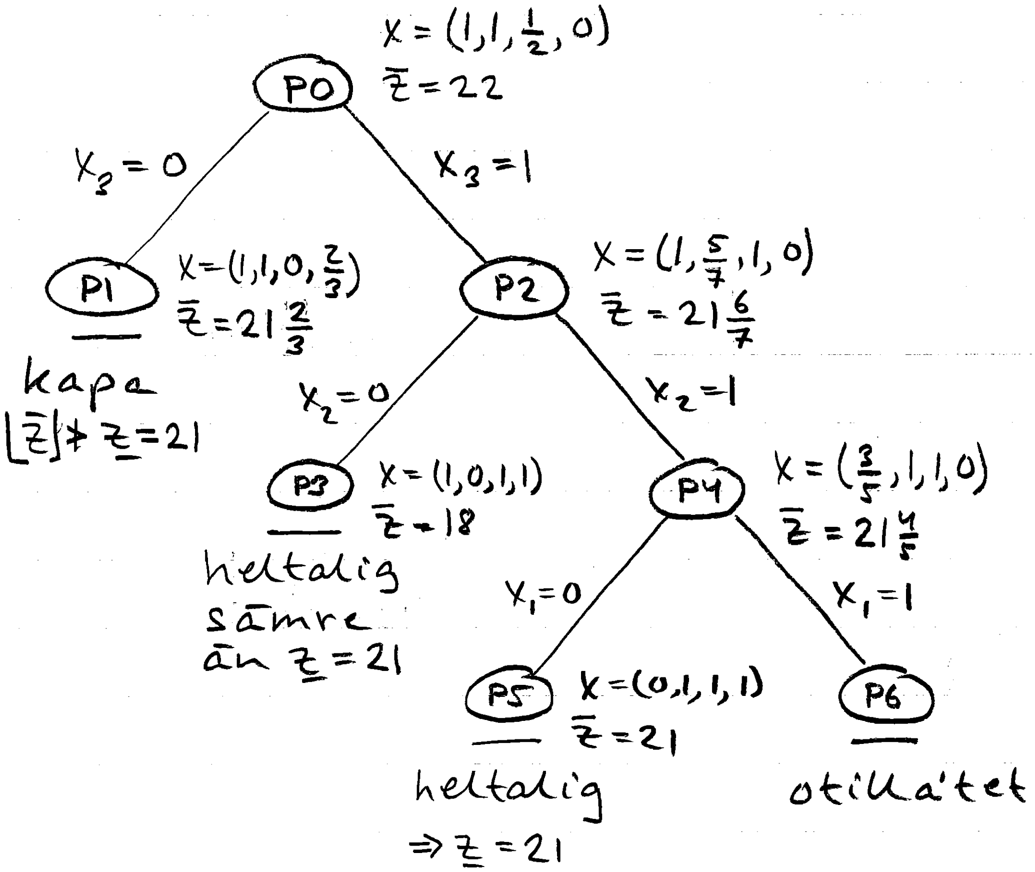
Avsökningsordning: 1, 4, 2, 5, 3, 6

Bv-träd:



b) Lösningsgången är oförändrad fram till att bågarna ut från nod 2 avsöks.

3. a)



Optimum: $x^* = (0,1,1,1) \Rightarrow z^* = 21$

b) Dual optimallösning: $y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Då fås: $z^*_{HP}(b=13) \leq z^*_{LP}(b=13) \leq z^*_{LP}(b=14) + \frac{3}{2}(13-14) =$

$= 22 + \frac{3}{2}(-1) = 20\frac{1}{2} \Rightarrow z^*_{HP}(b=13) \leq 20$, ty

$z^*_{HP}(b=13)$ är heltaligt.

4. a) x_1-raden: $x_1 - s_1 \leq 4 \Leftrightarrow 3x_2 \leq 10 \Leftrightarrow x_2 \leq \frac{10}{3}$

$s_1 = 6 + x_1 - 3x_2$

x_2-raden: $x_2 \leq 3$

(Målfunktionen ger inget Gomory-snitt eftersom $z^*_{LP} = 63$ är heltaligt.)

b) $x_2 \leq 3$ och $3x_1 + x_2 \leq 15$

(Fås genom att studera problemet grafiskt.)

5. a) KKT-villkor för problemet:

$$\begin{cases} -\begin{pmatrix} 2(x_1-1) \\ 2x_2 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (1) \\ y_1, y_2 \geq 0 & (2) \\ x_1^2 + 6x_2 \leq 39 & \\ -4x_1 + x_2^2 - 2x_2 \leq 3 & (3) \\ y_1(x_1^2 + 6x_2 - 39) = 0 & \\ y_2(-4x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 3) = 0 & (4) \end{cases}$$

För $\bar{x} = (3,5)^T$: (3) uppfyllda, med likhet, och (4) uppfyllda, ty (....) = 0.

$(1) \Rightarrow -\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix} + \bar{y}_1\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} + \bar{y}_2\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}$

$\bar{y} \geq 0 \Rightarrow$ (2) uppfyllt

(1)-(4) uppfyllda $\Rightarrow$ KKT-punkt.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{målfunktion är konvex}\\ \text{maximering}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ problemet är icke-konvext $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ KKT-villkoren är inte tillräckliga för optimalitet $\Rightarrow$ $\bar{x}$ behöver inte vara optimal.

Genom att studera problemet grafiskt inses att $\bar{x}$ inte är ett globalt optimum. Tex är punkten $x = (7,-3)^T$ tillåten och ger ett högre målfunktionsvärde än $\bar{x}$, varför $\bar{x}$ alltså inte är ett globalt maximum.

6. Lagrange-relaxerat problem:

$$h(u) = \min \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 + 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + u(50 - 3x_1 - 2x_2 - x_3) =$$
då $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$= 50u + \min_{x_1 \geq 0}\left\{\tfrac{1}{2}x_1^2 + (2-3u)x_1\right\} + \min_{x_2 \geq 0}\left\{\tfrac{1}{2}x_2^2 + (5-2u)x_2\right\} +$$
$$+ \min_{x_3 \geq 0}\left\{\tfrac{1}{2}x_3^2 + (3-u)x_3\right\}$$

$u=2 \Rightarrow x(2)=(4,0,0)$ (obs: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$!)

$\Rightarrow h(2)=92 \Rightarrow z^* \geq 92$

$x(2)$ är otillåten i ursprungliga problemet

$u=5 \Rightarrow x(5)=(13,5,2) \Rightarrow h(5)=151 \Rightarrow z^* \geq 151$

$x(5)$ är tillåten, med målfunktionsvärde 156 $\Rightarrow z^* \leq 156$

Alltså: $151 \leq z^* \leq 156$

7. a) Falskt! Tex punkten $x=(1,1,0,0)$ uppfyller systemet men uppfyller inte villkoret.

b) Falskt! Den duala optimallösningen är $y_1=2$, $y_2=1$, $y_3=0$. (Beräknas tex mha grafisk lösning och komplementaritet.) Obs. alternativt att $y=(1,2,0)$ är otillåten.

c) Sant! Newton-riktning i $\bar{x}=$

$= -\nabla^2 f(\bar{x})^{-1} \nabla f(\bar{x}) = \dots = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} // \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.