Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	24 augusti 2010
Tid:	14-19
Hjälpmedel:	Inga
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson, tel 2435.

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påstående Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Ett sätt att strålbehandla cancertumörer är att använda så kallad brachyterapi, vilket innebär att små radioaktiva strålkällor implanteras inuti eller nära tumören. För att optimera strålbehandlingen delas tumören och den omkringliggande friska vävnaden in i små volymer, så kallade voxlar. Antag att det finns totalt m stycken voxlar. Antag vidare att det finns n stycken möjliga positioner att placera radioaktiva källor i. Strålningen från varje möjlig position kan varieras godtyckligt, vilket i praktiken sker genom att variera tiden som en standardiserad strålkälla placeras i positionen. Om en sådan strålkälla placeras *en* tidsenhet i position $j, j = 1, \ldots, n$, så kommer den att ge en stråldos på d_{ij} enheter till voxel i, $i = 1 \ldots, m$. (Värden på dessa parametrar kan tas fram med hjälp av fysikaliska modeller av strålnings absorption eller med simuleringar.) Stråldoser till en voxel från olika strålpositioner *adderas*.

För varje voxel, $i = 1, \ldots, m$, finns en önskad lägsta total stråldos, l_i, och en önskad högsta, u_i, det vill säga det är önskvärt att stråldosen ligger inom intervallet $[l_i, u_i]$. (Detta intervall bestäms av om den aktuella voxeln innehåller tumörvävnad eller frisk vävnad, och i det senare fallet av hur känslig som den friska vävnad som finns i voxeln är för strålning.) Typiskt kan inte stråldoskraven för samtliga voxlar uppfyllas samtidigt, varför det är nödvändigt att finna en kompromiss mellan dem. Detta görs genom att man inför straff för att ligga utanför de önskade dosintervallen. Låt p_i^u vara straffet för varje enhet som stråldosen till voxel i *överskrider* den övre gränsen u_i. Låt analogt p_i^l vara straffet för varje enhet som stråldosen *underskrider* den undre gränsen l_i. Om dosen ligger inom intervallet $[l_i, u_i]$ så fås inget straff för voxel i. För att finna en kompromiss mellan stråldoskraven för *samtliga* voxlar minimeras den *sammanlagda* straffet.

Formulera en *linjär* optimeringsmodell för denna problemställning. **(3p)**

Uppgift 2

Betrakta ett riktat nätverk med bågkostnader enligt tabellen nedan, där ett streck betyder att motsvarande båge inte finns.

Från	Till nod					
nod	1	2	3	4	5	6
1	-	3	-	2	-	-
2	-	-	10	6	-	-
3	-	1	-	9	-	3
4	-	8	-	-	4	-
5	-	-	2	3	-	-
6	-	-	1	-	4	-

a) Använd Dijkstras algoritm för att bestämma billigaste vägar från nod 1 till alla andra noder. **(2p)**

b) Antag att kostnaden för bågen $(2,3)$ ändras från 10 till något annat icke-negativt värde. Måste problemet i så fall lösas om från början eller kan någon del av lösningsgången i deluppgift a återanvändas och, i så fall, hur stor del? **(1p)**

Uppgift 3

a) Lös kappsäcksproblemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \max z & = & 8x_1 & + & 11x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & & \\ \text{då} & & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 14 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1 \end{array}$$

med trädsökning. Förgrena alltid från det återstående delproblem som har högst optimistisk skattning. **(2p)**

b) Utnyttja den optimala duallösningen till LP-relaxationen för att visa att om högerledet i kappsäcksvillkoret minskar till 13 så sjunker det optimala målfunktionsvärdet för heltalsproblemet till 20 eller lägre. Uppgiften får inte lösas genom att det modifierade problemet löses med trädsökning. **(1p)**

Uppgift 4

a) Om LP-relaxationen till heltalsproblemet

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max\ z & = & 7x_1 & + & 9x_2 & & \\ \text{då} & & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ & & 7x_1 & + & x_2 & \leq & 35 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \quad \text{och heltaliga} \end{array}$$

beskrivs i dess optimalbas så fås

$$\max z = 63 - \frac{28}{11}s_1 - \frac{15}{11}s_2$$

$$\text{då} \begin{cases} x_1 \quad\quad - \frac{1}{22}s_1 + \frac{3}{22}s_2 = \frac{9}{2} \\ \quad\quad x_2 + \frac{7}{22}s_1 + \frac{1}{22}s_2 = \frac{7}{2} \\ x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \leq 0, \end{cases}$$

där s_1 och s_2 är slackvariabler i de två ursprungliga villkoren.

Tag fram samtliga möjliga Gomory-snitt, uttryckta i x_1 och x_2. **(2p)**

b) Vilka fasett-definierande giltiga olikheter måste läggas till heltalsproblemet för att dess LP-optimum ska lösa heltalsproblemet? **(1p)**

Uppgift 5

Givet problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & (x_1-1)^2 & + & x_2^2 & & & & \\ \text{då} & x_1^2 & + & 6x_2 & \leq & 39 & & \\ & -4x_1 & + & x_2^2 & - & 2x_2 & \leq & 3. \end{array}$$

a) Visa att $\bar{x} = (3,5)^T$ är en Karush-Kuhn-Tucker-punkt. **(2p)**

b) Avgör om $\bar{x}$ är ett globalt optimum eller ej. Motivera noga! **(1p)**

Uppgift 6

Givet det kvadratiska problemet

$$\begin{array}{rccccccccccc} z^* = \min & \frac{1}{2}x_1^2 & + & \frac{1}{2}x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_3^2 & + & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 \\ \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 50 & & & & \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. & & & & \end{array}$$

Lagrange-relaxera det linjära villkoret med multiplikator $u = 2$ och med $u = 5$. Ge starkaste möjliga uppskattningar av z^* utifrån de gjorda beräkningarna. **(3p)**

Uppgift 7

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falsk. Motivera svaret!

a) Villkoret $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 3$ är en giltig olikhet för de tillåtna lösningarna till systemet

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & + & x_4 & \geq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & \geq & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & \geq & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & \geq & 1 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1. \end{array} \right.$$

(1p)

b) En optimal duallösning till LP-problemet

$$\begin{array}{rccccccl} \min & z = & 7x_1 & + & 4x_2 & & & \\ \text{då} & & 3x_1 & + & x_2 & \geq & 9 & \vert\ y_1 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 8 & \vert\ y_2 \\ & & 2x_1 & + & 5x_2 & \geq & 12 & \vert\ y_3 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

ges av $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0$. **(1p)**

c) Newton-riktningen för funktionen

$$f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1 + x_2)^2$$

i punkten $\bar{x} = (\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})^T$ är parallell med vektorn $\bar{d} = (-1, -2)^T$. **(1p)**
