Tentamen i Opt grk Y den 9 juni 2010: svar och kortfattade lösningar.

1. Variabler:

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ om container } i \text{ används} \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ om föremål } j \text{ packas i container } i \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Modell:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$$

$$\text{då} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \le b_i y_i, \quad i = 1, \ldots, m & (1) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n & (2) \\ x_{ij} = 0/1, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n \\ y_i = 0/1, \quad i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ ingen container packas med för stor vikt och inget föremål packas i en container som inte används

(2) $\Rightarrow$ varje föremål packas i exakt en container

2. a) Inför slackvariabler $x_4, x_5 \geq 0$.
Med x_1 som inkommande blir x_4 utgående. Därefter blir x_3 inkommande och x_5 utgående, vilket ger optimaltablån:

bas-var.	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	värde
z	1	0	−9	0	−11/2	−1/2	−294
x_1	0	1	6	0	2	−1	36
x_3	0	0	−1	1	−1/2	1/2	6

Optimum: $x_1^* = 36,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 6 \Rightarrow z^* = 294$

b) Optimal duallösning: $y^{*T} = C_B^T B^{-1} =$

$$= (6,13)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\tfrac{11}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

[Kan alternativt fås ur optimaltablåns målfunktionsrad.]

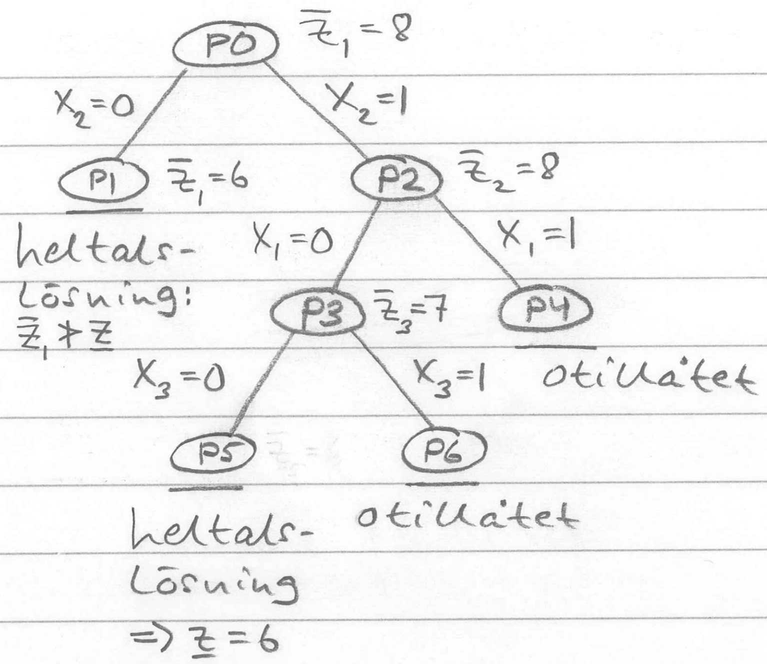
Reducerad kostnad för x_{ny}:

$$\bar{c}_{ny} = c_{ny} - y^{*T}A_{ny} = c_{ny} - \left(\tfrac{11}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = c_{ny} - 19$$

Om $\bar{c}_{ny} > 0 \Leftrightarrow c_{ny} > 19$ så blir x_{ny} inkommande och z^* ökar. (Med säkerhet, eftersom optimum var icke-degenererat.)

Alltså: $c_{ny} > 19 \Rightarrow z^*$ förändras.

3.



P0: $x=(0{,}5,\ 0{,}875,\ 0{,}375)$, $z=8{,}875 \Rightarrow \bar{z}_1=8$
[ty z^* heltaligt]
Förgrena över x_2.

P2: $x=(0{,}333,\ 1,\ 0{,}333)$, $z=8{,}667 \Rightarrow \bar{z}_2=8$
Förgren över x_1.

P4: Tillåten lösning saknas $\Rightarrow$ kapa.

P3: Med $x_2=1$ och $x_1=0$ fås problemet

$$\max\ 6+3x_3$$
$$\text{då } \begin{cases} 3+x_3 \le 4 \\ 2+2x_3 \le 4 \\ 2+2x_3 \le 3 \\ x_3 = 0/1 \end{cases}$$

LP-optimum: $x=(0,1,0{,}5)$, $z=7{,}5 \Rightarrow \bar{z}_3=7$
Förgren över x_3.

P6: Otillåtet, kapa.

P5: $x=(0,1,0)$, $z=6$
Heltalslösning $\Rightarrow \underline{z}=6$, kapa.

P1: $x=(1,0,0{,}5)$, $z=6{,}5 \Rightarrow \bar{z}_1=6$
$\bar{z}_1 \ngtr \underline{z} \Rightarrow$ kapa.

Trädet avsökt!

Optimum: $x^*=(0,1,0)$ med $z^*=6$.

4. Eftersom logaritm-funktionen är monotont växande gäller att $\ln(e^{x_1}+e^{x_2}) \geq 1 \Leftrightarrow e^{x_1}+e^{x_2} \geq e$. Betrakta punkterna $x^1=(1,-1)^T$ och $x^2=(-1,1)^T$. Eftersom $e^{x_1^1}+e^{x_2^1}=e+e^{-1}>e$ så tillhör x^1 den givna mängden, och detta gäller uppenbarligen även för x^2. Skapa nu konvexkombinationen $x^3=\frac{1}{2}x^1+\frac{1}{2}x^2=(0,0)^T$. Eftersom $e^0+e^0=1+1=2 \ngeq e$ så tillhör x^3 inte den givna mängden. Från definitionen av konvex mängd följer då att den givna mängden inte är konvex.

5. a) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+2x_2-5 \\ 4x_2+2x_1-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^0)^T d^0 = (-3,-2)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -10 < 0 \Rightarrow d^0$ är en avtaganderiktning för $f(x)$ i x^0.

b) $x(t) = x^0 + td^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$

$\varphi(t) = f(x(t)) = (4t)^2 + 2(1-t)^2 + 2(4t)(1-t) - 5(4t) - 6(1-t)$

Sök $\min\limits_{t\geq 0} \varphi(t)$!

$\varphi'(t) = 20t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\varphi''(t) = 20 \geq 0, \ \forall t \Rightarrow$ minimum

Optimalt steg: $t = \frac{1}{2}$.

c) $x^1 = x(\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs x^1 stationär punkt

$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(\nabla^2 f(x) - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5} \geq 0, \ \forall x \in R^2$

$\Rightarrow f(x)$ konvex på R^2

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(x^1) = (0,0)^T \\ f(x) \text{ konvex på } R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^1 \text{ globalt minimum}$$

6. a) Låt $f_j(x_j) = x_j(\ln x_j + c_j)$. För $x_j > 0$ fås

$f''(x_j) = \frac{1}{x_j} \geq 0$. Alltså är varje $f_j(x_j)$, $j=1,\dots,n$, konvex för $x_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Eftersom varje $f_j(x_j)$ dessutom har ett gränsvärde då $x_j \to 0^+$ (nämligen 0) så är $f_j(x_j)$ konvex för $x_j \geq 0$. Slutligen följer att målfunktionen då är konvex för $x_j \geq 0$, $j=1,\ldots,n$, eftersom summan av konvexa funktioner också är konvex.

Det tillåtna området är konvext eftersom det definieras av linjära villkor.

$$\left.\begin{array}{l}\text{minimeringsproblem}\\ \text{konvex målfunktion}\\ \text{konvext tillåtet område}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ konvext problem!

b) Karush-Kuhn-Tucker-villkor:

$$\begin{cases} \ln x_j + c_j + 1 + v - y_j = 0, \quad j=1,\ldots,n & (1)\\ y_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,n & (2)\\ v \text{ fri} & (3)\\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & (4)\\ x_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,n & (5)\\ y_j x_j = 0, \quad j=1,\ldots,n & (6)\end{cases}$$

där v är multiplikator för villkoret (4) och y_j, $j=1,\dots,n$, är multiplikatorer för villkoren (5).

Lösningen $\hat{x}_j = e^{-c_j} / \sum_{j=1}^{n} e^{-c_k}$, $j=1,\dots,n$,

uppfyller villkoren (4) och (5).

(6) $\Rightarrow y_j^* = 0$, $j=1,\dots,n$, ty $\hat{x}_j > 0$, $j=1,\dots,n$.

(2) uppfyllt. [(3) alltid uppfyllt.]

(1) uppfylls med $v^* = \ln\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-c_k}\right) - 1$

Alltså uppfylls villkoren för de givna lösningen. Eftersom problemet är konvext är lösningen då ett globalt optimum.

7. a) Falskt! De givna bågarna innehåller en cykel, genom noderna 2, 4 och 5, och utgör därför inte ett uppspännande träd.

b) Falskt! Relationen $h(u) \leq f^*$ gäller alltid, oavsett om $x(u)$ uppfyller de relaxerade villkoren eller ej.

c) Sant! Villkoret är Gomorys heltalssnitt för raden i optimaltablån.