Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	9 juni 2010
Tid:	14-19
Hjälpmedel:	Inga
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson, tel 2435.

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påstående Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Transportföretaget Havsfrakt AB står inför följande problem. Man vill frakta n stycken föremål i containrar. Föremål j, $j = 1, \ldots, n$, väger a_j ton. Till sitt förfogande har man m stycken containrar. Container i, $i = 1, \ldots, m$, kan rymma en last på b_i ton. Föremålen är tunga i förhållande till sina storlekar, varför det är endast containrarnas viktkapacitet som kan begränsa hur de packas med föremål. Det kostar c_i kronor att använda container i, $i = 1, \ldots, m$, oavsett hur mycket den väger. Havsfrakt AB vill välja vilka containrar som ska användas så att den totala kostnaden minimeras.

Hjälp Havsfrakt AB att formulera en *linjär 0/1-modell* för denna frågeställning. Använd *både* variabler som beskriver vilka containrar som används och variabler som beskriver hur föremålen packas i containrar. **(3p)**

Uppgift 2

a) Lös följande linjära optimeringsproblem med simplexmetoden.

$$\begin{array}{rrcrcrcrl} \max\ z & = & 6x_1 & + & 14x_2 & + & 13x_3 & & \\ \text{då} & & x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 48 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 60 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

[Ledning: Välj i den första iterationen variabeln x_1 som inkommande.] **(2p)**

b) Antag att problemet utökas med en ny variabel, x_{ny}, med bivillkorskoefficienter $A_{ny} = (3, 5)^T$. För vilka värden på dess målfunktionskoefficient, c_{ny}, kommer det optimala målfunktionsvärdet som beräknats i *a)* att förändras? **(1p)**

Uppgift 3

Studenten Adam har just läst linjärprogrammering. Nu ställs Adam inför följande linjära heltalsproblem med binära variabler, och han tänker att detta problem inte ska vara speciellt mycket svårare att lösa än de problem han är van vid.

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Adam tar sin LP-lösare till hjälp, löser LP-relaxationen till problemet ovan och får fram följande lösning:

$$x_1 = 0.5,\ x_2 = 0.875,\ x_3 = 0.375 \text{ med } z = 8.875$$

Han frustreras först över att resultatet inte blivit heltaligt, men får sedan en idé: Genom att fixera vissa variabler till ett heltaligt värde kommer han att hitta en lösning. Han gör följande försök:

Fixeringen $x_1 = 1$ ger $x_2 = 0.5,\ x_3 = 0$ med $z = 8$
Fixeringen $x_2 = 1$ ger $x_1 = 0.333,\ x_3 = 0.333$ med $z = 8.6667$
Fixeringen $x_3 = 1$ ger $x_1 = 0.5,\ x_2 = 0.25$ med $z = 7$
Fixeringen $x_1 = 0$ ger $x_2 = 1,\ x_3 = 0.5$ med $z = 7.5$
Fixeringen $x_2 = 0$ ger $x_1 = 1,\ x_3 = 0.5$ med $z = 6.5$
Fixeringen $x_3 = 0$ ger $x_1 = 0.8,\ x_2 = 0.8$ med $z = 8.8$

Adam lyckas fortfarande inte få en heltalig lösning, och i detta läge ger han upp och ber om din hjälp.

Lös det givna problemet med trädsökning med strategin att:

- Förgrena över den variabel som har störst fraktionell del och om det finns flera sådana variabler att välja mellan, välj den med lägst index först.
- Avsök $\geq$-grenen först.
- Använd djup-först-sökning.

Givetvis får du använda dig av de resultat Adam fått fram i sina beräkningar om de är till hjälp för dig. **(3p)**

Uppgift 4

Avgör om mängden

$$\{x \in R^2 \mid \ln(e^{x_1} + e^{x_2}) \geq 1\}$$

är konvex. Ge ett bevis eller ett motexempel! **(3p)**

Uppgift 5

Givet det obegränsade problemet

$$\min_{x \in R^2} \; f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 - 6x_2$$

samt punkten $x^0 = (0, 1)^T$ och riktningen $d^0 = (4, -1)^T$.

a) Visa att d^0 är en avtaganderiktning från x^0. **(1p)**

b) Beräkna en optimal steglängd från x^0 i riktningen d^0. **(1p)**

c) Vad kan sägas om den punkt som fås med ett optimalt steg från punkten x^0 i riktningen d^0? Är det en stationär punkt, ett lokalt optimum eller ett globalt optimum? Gör en starkaste möjliga utsaga! **(1p)**

Uppgift 6

Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j(\ln x_j + c_j) \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

där $c_j, \ \ j = 1, \ldots, n$, är givna konstanter.

a) Visa att problemet är konvext. **(1p)**

b) Använd Karush-Kuhn-Tucker-villkor för att visa att ett globalt optimum ges av

$$x_j^* = e^{-c_j} / \sum_{k=1}^{n} e^{-c_k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(2p)

Uppgift 7

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera svaret!

a) Ett oriktat fullständigt nätverk har bågkostnder enligt tabellen nedan.

	Till				
Från	1	2	3	4	5
1	-	7	5	8	9
2	-	-	8	2	3
3	-	-	-	6	9
4	-	-	-	-	4
5	-	-	-	-	-

Ett billigaste uppspännande träd utgöres då av bågarna (1,3) , (2,4) , (2,5) och (4,5). **(1p)**

b) Givet problemet

$$\begin{aligned} f^* &= \min \quad f(x) \\ &\quad \text{då} \quad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ &\qquad\quad\;\; x \in X \end{aligned}$$

och dess Lagrange-relaxation

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x),$$

där $u_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$. Låt $x(u)$ vara en optimallösning till Lagrange-relaxationen.

Då gäller att om det finns ett i sådant att $g_i(x(u)) > 0$ så är $h(u) \le f^*$ och om $g_i(x(u)) \le 0$ gäller för *alla* i så är $h(u) \ge f^*$.

(1p)

c) Givet ett linjärt heltalsproblem, med endast heltaliga indata, vars LP-relaxation lösts med simplexmetoden, varvid en rad i optimaltablån ges av

$$x_1 - \frac{7}{5}x_2 + \frac{6}{5}x_3 = \frac{13}{5}.$$

Då gäller att varje tillåten heltalslösning uppfyller villkoret $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2$. **(1p)**
