Tentamen i Opt grk Y den 12/3-10: svar och kortfattade lösningar.

1. Variabler: x_j = antal Mkr som investeras i obligation av typ j, där j = A, B, C, D, E.

Målfkn: $\max z = \frac{4,3}{100}x_A + \frac{2,7}{100}x_B + \frac{2,5}{100}x_C + \frac{2,2}{100}x_D + \frac{4,5}{100}x_E$

där z = avkastningen under första året.

Bivillkor:

i) $\Rightarrow x_j \geq 0, \; j = A, .., E$

ii) $\Rightarrow x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \leq 10$

iv) $\Rightarrow x_B + x_C + x_D \geq 4$

v) $\Rightarrow \dfrac{2x_A + 2x_B + x_C + x_D + 5x_E}{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E} \leq 1,4$

$\Leftrightarrow 0,6x_A + 0,6x_B - 0,4x_C - 0,4x_D + 3,6x_E \leq 0$

vi) $\Rightarrow \dfrac{9x_A + 15x_B + 4x_C + 3x_D + 2x_E}{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E} \leq 5$

$\Leftrightarrow 4x_A + 10x_B - x_C - 2x_D - 3x_E \leq 0$

2\. a) $w^* = \max w = 7y_1 + 9y_2 + 8y_3$

$$\text{då} \begin{cases} 6y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 9 \\ 2y_1 + 7y_2 + 5y_3 \leq 7 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 6 \\ 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 8 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

b) Primalt tillåtna lösningar ger pessimistiska skattningar av z^* och dualt tillåtna lösningar ger optimistiska skattningar av z^*.

$x^1 = (0,1,0,1)$: otillåten, ger inget
$x^2 = (1,0,1,1)$: tillåten $\Rightarrow z^* \leq 9+6+8 = 23$
$x^3 = (0,1,1,1)$: tillåten $\Rightarrow z^* \leq 7+6+8 = 21$

$y^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: tillåten $\Rightarrow z^* \geq \frac{7}{2} + \frac{9}{2} + \frac{8}{2} = 12$
$y^2 = (1,0,1)$: tillåten $\Rightarrow z^* \geq 7+8 = 15$
$y^3 = (0,1,1)$: otillåten, ger inget

$$\left.\begin{matrix} z^* \leq 23 \\ z^* \leq 21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z^* \leq 21$$

$$\left.\begin{matrix} z^* \geq 12 \\ z^* \geq 15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z^* \geq 15$$

Alltså: $15 \leq z^* \leq 21$.

3. a) Välj bågar i fallande kostnads-
ordning, förutom sådana
bågar som bildar cykler med redan
valda bågar.

Sekvens: (3,6), (4,6), (1,3), (1,5), (1,2)

Kostnad: 13+13+12+12+10 = 60

b) Studera vad som händer i metoden
för olika val av kostnad på båge (1,4),
kallad c_{14}. [Börja med stora värden,
för att säkerställa att (1,4) ingår
i trädet.]

$c_{14} > 13 \Rightarrow$ (1,4) väljs först $\Rightarrow$ ingår!
$12 < c_{14} \leq 13 \Rightarrow$ (1,4) välj samtidigt eller direkt efter
(3,6) och (4,6) utan att cykler
bildas $\Rightarrow$ ingår!
$c_{14} = 12 \Rightarrow$ båge (1,5) och <u>en av</u> (1,3) och (1,4)
väljs $\Rightarrow$ <u>kan</u> ingå!
$c_{14} < 12 \Rightarrow$ efter att (3,6), (4,6), (1,3) [och
(1,5)] valts är noderna 1 och
4 redan sammankopplade $\Rightarrow$
(1,4) bildar cykel $\Rightarrow$ ingår <u>inte</u>!

Alltså: lägsta värdet för att (1,4) ska
kunna ingå i trädet är 12.

4. a) Studera egenvärdena till $\nabla^2 f(x,y)$.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x/y}}{y} & -\frac{x e^{x/y}}{y^2} \\ -\frac{x e^{x/y}}{y^2} & \frac{x^2 e^{x/y}}{y^3} \end{pmatrix} = \frac{e^{x/y}}{y} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ -\frac{x}{y} & \frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}$$

$y>0 \Rightarrow \frac{e^{x/y}}{y} > 0 \Rightarrow$ denna term påverkar inte egenvärdenas teckenstruktur

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{x}{y} \\ -\frac{x}{y} & \frac{x^2}{y^2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 0 \geq 0 \\ 1+\frac{x^2}{y^2} \geq 0 \end{cases}$$

$\nabla^2 f(x,y)$ är positivt semidefinit då $y>0$
$\Rightarrow f(x,y)$ är konvex då $y>0$

b) Betrakta två punkter x^1 och x^2, och låt $\lambda \in [0,1]$. Då fås:

$$\|\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\| \underset{(iii)}{\leq} \|\lambda x^1\|+\|(1-\lambda)x^2\| \underset{(ii)}{=}$$

$$= |\lambda|\cdot\|x^1\| + |1-\lambda|\cdot\|x^2\| \underset{\substack{\lambda\geq 0 \\ 1-\lambda\geq 0}}{=} \lambda\|x^1\|+(1-\lambda)\|x^2\|$$

Enligt definitionen av konvex funktion är då alltså en norm konvex.

5. a) $v(a) = \min\ (x_1+1)^2 + (x_2+3)^2$

då $x_1^2 - x_2 + a \leq 0 \quad | \quad y_1 \geq 0$

$-x_1 - x_2 \leq 0 \quad | \quad y_2 \geq 0$

$x_2 - 1 \leq 0 \quad | \quad y_3 \geq 0$

KKT-villkor:

$$\begin{pmatrix} 2(x_1+1) \\ 2(x_2+3) \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad (3)$

$x_1^2 - x_2 + a \leq 0 \quad (4)$

$-x_1 - x_2 \leq 0 \quad (5)$

$x_2 - 1 \leq 0 \quad (6)$

$y_1(x_1^2 - x_2 + a) = 0 \quad (7)$

$y_2(-x_1 - x_2) = 0 \quad (8)$

$y_3(x_2 - 1) = 0 \quad (9)$

b) För $a = 0$ och $x = (0,0)$ gäller:

(4)–(6) uppfyllda

(7), (8) uppfyllda

(9) uppfyllt om $y_3 = 0$

(1), (2) med $y_3 = 0$ ger $y_1 = 4$ och $y_2 = 2$

(3) uppfyllt

KKT-villkoren alltså uppfyllda, med $y_1 = 4$, $y_2 = 2$ och $y_3 = 0$.

[Observera att det finns andra, men ekvivalenta, sätt att teckna KKT-villkoren, vilka speciellt kan ge upphov till andra teckenkrav på y_1, y_2, y_3.]

c) $v'(0) = y_1 = 4$

[Notera att om a ökar så minskar det tillåtna området, varför det minimala målfunktionsvärdet ökar, vilket innebär att $v'(0) > 0$.]

6. Lagrange-funktionen blir

$$L(x,u) = 3(x_1-3)^2+3(x_2-2)^2+u_1(x_1^2+x_2^2-5)+u_2(x_1+2x_4-4).$$

Lagrange-relaxerat problem:

$$h(u) = \min_{x\in R^2} L(x,u) = /\text{separation}/ =$$

$$= -5u_1-4u_2+\min_{x_1\in R}\left(3(x_1-3)^2+u_1x_1^2+u_2x_1\right)+$$

$$+\min_{x_2\in R}\left(3(x_2-2)^2+u_1x_2^2+2u_2x_2\right)$$

$$h(2,2) = -18+\min_{x_1\in R}\left(3(x_1-3)^2+2x_1^2+2x_1\right)+$$

$$+\min_{x_2\in R}\left(3(x_2-2)^2+2x_2^2+4x_2\right)$$

De två subproblemen är obegränsade och konvexa, och kan därför lösas genom att söka stationära punkter.

$$\frac{d}{dx_1}\{\_\_\} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1 = \frac{8}{5}$$

$$\frac{d}{dx_2}\{\ldots\} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_2 = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow h(2,2) = \ldots = 5 \Rightarrow f^* \geq 5$$

$x = (\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$ tillåten?

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{80}{25} \leq 5 \\ \frac{8}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ja!}$$

Målfunktionsvärde: $3\left(\frac{8}{5}-3\right)^2 + 3\left(\frac{4}{5}-2\right)^2 = 10\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow f^* \leq 10\frac{1}{5}$$

Alltså: $5 \leq f^* \leq 10\frac{1}{5}$

7. a) Sant!

Inför $x_3^{ny} = 1 - x_3$ och $x_4^{ny} = 1 - x_4$. Då fås:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 6x_3^{ny} + 5x_4^{ny} + 8x_5 \leq 12 \\ x_1,\ x_2,\ x_3^{ny},\ x_4^{ny},\ x_5 = 0/1. \end{cases}$$

En tillåten lösning måste uppfylla

$x_2 + x_3^{ny} + x_5 \leq 1 \iff x_3 \geq x_2 + x_5$.

[Uppgiften kan lösas på andra sätt, tex genom att visa att varje tillåten lösning till det givna systemet också uppfyller villkoret $x_3 \geq x_2 + x_5$.]

b) Falskt!

Motexempel: $\max\ x_1 + x_2$

$$\text{då } x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

där $m = 1$ och $n - m = 2$. Problemet har alternativa optima, tex $x = (1,1,0)$ med $2 > 1 = m$ positiva variabler och $1 < 2 = n - m$ variabel som är noll.

c) Sant!

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 + \lceil -\frac{7}{5} \rceil x_2 + \lceil \frac{6}{5} \rceil x_3 \geq x_1 - \frac{7}{5} x_2 + \frac{6}{5} x_3 = \frac{13}{5} \\ x_1, x_2, x_3 \text{ heltaliga} \Rightarrow x_1 + \lceil -\frac{7}{5} \rceil x_2 + \lceil \frac{6}{5} \rceil x_3 \text{ heltalig} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x_1 + \lceil -\frac{7}{5} \rceil x_2 + \lceil \frac{6}{5} \rceil x_3 \geq \lceil \frac{13}{5} \rceil \Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3$$