Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	12 mars 2010
Tid:	08-13
Hjälpmedel:	Inga
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson, tel 2435.

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påstående Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

En portföljförvaltare skall investera i ett antal olika typer av obligationer, vilkas egenskaper ges i tabellen nedan

Typ	Risk	Löptid (år)	Ränta (%/år)
A	2	9	4,3
B	2	15	2,7
C	1	4	2,5
D	1	3	2,2
E	5	2	4,5

Kolumnen "Risk" innehåller tal som indikerar hur säker varje placering är.

Investeringen skall göras enligt följande kriterier:

i) Vilket belopp som helst kan investeras i en *enskild* typ av obligation.

ii) *Högst* 10 Mkr skall investeras *sammanlagt.*

iii) Investeringen skall göras så att den totala avkastningen under det första året maximeras.

iv) Minst 4 Mkr måste totalt investeras i obligationstyperna B, C och D.

v) Den genomsnittliga risknivån får inte överstiga 1,4. [Om man till exempel investerar 6 Mkr i obligationstyp A och 3 Mkr i typ E så blir den genomsnittliga risknivån $(6 \cdot 2 + 3 \cdot 5)/9 = 3$.]

vi) Den genomsnittliga löptiden får inte överstiga 5 år.

Formulera en *linjär* optimeringsmodell för detta investeringsproblem. **(3p)**

Uppgift 2

Betrakta det primala problemet

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl} z^*= \min & z = & 9x_1 & + & 7x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & & \\ \text{då} & & 6x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \geq & 7 \\ & & 3x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 9 \\ & & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \geq & 8 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Teckna det duala problemet. Låt dualvariablerna vara $y = (y_1, y_2, y_3)$. **(1p)**

b) Givet de tre primala punkterna

$$\begin{array}{rcl} x^1 & = & (0,1,0,1) \\ x^2 & = & (1,0,1,1) \\ x^3 & = & (0,1,1,1) \end{array}$$

och de tre duala punkterna

$$\begin{array}{rcl} y^1 & = & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ y^2 & = & (1,0,1) \\ y^3 & = & (0,1,1). \end{array}$$

Utnyttja endast dessa sex punkter för att ge ett så litet intervall som möjligt för optimalvärdet z^*. **(2p)**

Uppgift 3

a) Betrakta ett oriktat nätverk med sex noder och bågar mellan alla par av noder samt bågkostnader enligt tabellen nedan.

	nod					
nod	1	2	3	4	5	6
1	-	10	12	7	12	7
2	-	-	4	6	3	9
3	-	-	-	5	2	13
4	-	-	-	-	6	13
5	-	-	-	-	-	11
6	-	-	-	-	-	-

Finn ett *dyraste* uppspännande träd. **(2p)**

b) Antag att vi vill att bågen $(1,4)$ ska *kunna ingå* i ett dyraste uppspännande träd. Vilket är det *lägsta* värde på kostnaden för båge $(1,4)$ för vilket detta gäller? **(1p)**

Uppgift 4

a) Visa att funktionen $f(x,y) = ye^{x/y}$ är konvex för $y > 0$. **(2p)**

b) Låt $\| \cdot \|$ beteckna en norm, det vill säga en funktion som uppfyller villkoren:

$$\begin{array}{ll} i) & \| x \| = 0 \ \text{ om och endast om } \ x = 0, \\ ii) & \| ax \| = |a| \cdot \| x \| \ \text{ för } \ a \in R, \\ iii) & \| x + y \| \ \leq \ \| x \| + \| y \| \ . \end{array}$$

Visa att en norm är en konvex funktion. **(1p)**

Uppgift 5

Betrakta det konvexa problemet

$$\begin{array}{rl} v(a) = \min & (x_1+1)^2 + (x_2+3)^2 \\ \text{då} & x_2 \geq x_1^2 + a \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 \leq 1, \end{array}$$

där a är en parameter.

a) Teckna Karush-Kuhn-Tucker-villkoren för problemet. **(1p)**

b) Visa att för $a = 0$ uppfyller punkten $(0,0)$ Karush-Kuhn-Tucker-villkoren. **(1p)**

c) Bestäm $v'(0)$. **(1p)**

Uppgift 6

Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcccl} f^* & = \min & 3(x_1-3)^2 & + & 3(x_2-2)^2 & \\ & \text{då} & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq 5 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & \leq 4. \end{array}$$

Lagrange-relaxera de två villkoren med multiplikatorvärdena $u_1 = 2$ och $u_2 = 2$ och lös det resulterande subproblemet.

Vilken är den starkaste möjliga utsaga om f^* som kan göras utifrån de gjorda beräkningarna? **(3p)**

Uppgift 7

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera svaret!

a) Villkoret $x_3 \geq x_2 + x_5$ är en giltig olikhet för de tillåtna lösningarna till systemet

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccl} 4x_1 & + & 7x_2 & - & 6x_3 & - & 5x_4 & + & 8x_5 & \leq & 1 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & = & 0/1. \end{array} \right.$$

(1p)

b) Antag att det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rccl} \max & z & = & c^T x \\ \text{då} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0, \end{array}$$

där $A \in R^{m \times n}$, är tillåtet och icke-degenererat. Då gäller för en *godtycklig optimallösning* att m stycken variabler antar positiva värden och att $n-m$ variabler är noll. **(1p)**

c) Givet ett linjärt heltalsproblem, med endast heltaliga indata, vars LP-relaxation lösts med simplexmetoden, varvid en rad i optimaltablån ges av

$$x_1 - \frac{7}{5}x_2 + \frac{6}{5}x_3 = \frac{13}{5}.$$

Då gäller att varje tillåten heltalslösning uppfyller villkoret $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3$. **(1p)**
