TAOP07 Opt grk Y den 20 augusti 2009:
svar och kortfattade lösningar.

1. $\max z = c_1x_1 + c_2x_2 - d_1y_1 - d_2y_2 - d_3y_3$

$$\text{då } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 + y_1 \\ y_1 \le \Delta b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + y_3 + s = b_3 \\ s \le \Delta b_3 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, s \ge 0 \end{cases}$$

2. a) $w^* = \max 17y_1 + 11y_2 + 12y_3$

$$\text{då } \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 6 \\ 6y_1 + 2y_2 \le 9 \\ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 \le 13 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

b) Varje dualt tillåten ger en optimistisk skattning av det primala optimalvärdet.

$(1,1,1)$: tillåten $\Rightarrow z^* \ge 17 + 11 + 12 = 40$

$(1,2,1)$: otillåten

$(1,0,2)$: tillåten $\Rightarrow z^* \ge 17 + 24 = 41$

Alltså gäller att $z^* \ge 41$.

3\. a) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2-x_2)+2(x_1-1) \\ -2(x_1^2-x_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = (0,2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0$

$\Rightarrow$ $\bar{d}$ är en avtaganderiktning

b) $x(t) = \bar{x} + t\bar{d} = \begin{pmatrix} -1+2t \\ 2-t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$

$\varphi(t) = f(x(t)) = ((2t-1)^2-(2-t)^2)^2 - (2t-2)^2 =$

$= 16t^4 - 24t^3 + 5t^2 - 2t + 5$

$\varphi'(t) = 64t^3 - 72t^2 + 10t - 2 \Rightarrow \varphi'(1) = 0$

$\varphi''(t) = 192t^2 - 144t + 10 \Rightarrow \varphi''(1) > 0 \Rightarrow$ minimum

Alltså är $\bar{t} = 1$ ett optimalt steg.

c) $\varphi''(\frac{1}{2}) = 48 - 72 + 10 < 0 \Rightarrow \varphi(t)$ är <u>konkav</u> för t nära $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow f(x)$ är <u>inte</u> <u>konvex</u> på R^2.

[Alternativt: $f(-1,2) = 5$, $f(1,1) = 0$ och
$f(\frac{1}{2}(-1,2) + \frac{1}{2}(1,1)) = f(0, \frac{3}{2}) = 3\frac{1}{4} \Rightarrow$
$f(\frac{1}{2}(-1,2) + \frac{1}{2}(1,1)) \not\leq \frac{1}{2}f(-1,2) + \frac{1}{2}f(1,1)$, vilket motbevisar att $f(x)$ är konvex på R^2.
Man kan även studera egenvärdena till $\nabla^2 f(x)$, till exempel för $\bar{x}$.]

4. KKT-villkor:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 4(x_1 - \frac{3}{4}) \\ 2(x_2 - \frac{5}{4}) \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{(i)} \\ v \geq 0 & \text{(ii)} \\ x_1^2 + x_2 - 1 \leq 0 & \text{(iii)} \\ v(x_1^2 + x_2 - 1) = 0 & \text{(iv)} \end{cases}$$

$\bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})^T$ i (i) ger $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v = 1$, vilket uppfyller (ii).

$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 - 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = 0 \Rightarrow$ (iii) & (iv) OK

Alltså är $\bar{x}$ en KKT-punkt.

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimering} \\ f \text{ konvex} \\ g \text{ —''—} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{konvext problem}$$

$\Rightarrow \bar{x}$ är även ett globalt minimum.

5. a) $a \geq 4$ och $b \leq 1$

b) inga a och $b = 1$

c) $2x_1 + x_2 \leq 5$ och $x_2 \leq 3$

6. a) $\min 2x_{12} + x_{15} + \ldots + 4x_{67} + u(3 - x_{24} - \ldots - x_{47})$

Kostnaderna för de bågar som ansluter till Butter-noden ändras till $c_{ij} - u$.

b) $u = 0$ (dvs ursprungliga kostnader):
då minimalträdsproblemet löses med tex Kruskal fås trädet (1,5), (3,7), (1,2), (4,6), (2,3) och (6,7), med kostnad 13 $\Rightarrow z^* \geq 13 + 0 \cdot 3 = 13$, trädet uppfyller inte Buttervillkoret

$u = 2$: trädet (4,6), (1,5), (3,7), (1,2), (2,3) och (2,4), med kostnad 10 $\Rightarrow$ $z^* \geq 10 + 2 \cdot 3 = 16$, trädet uppfyller inte Buttervillkoret

Alltså: $z^* \geq 16$ och $u^* > 2$.

c) Det är inte säkert att de tre billigaste rören ingår i en optimallösning till problemet, varför den föreslagna metoden kan ge ett träd som uppfyller Buttervillkoret men som inte är optimalt.

7. a) Sant. KKT-villkoren för problemet ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - v_j = 0, & j=1,\dots,n \\ v_j \geq 0, & j=1,\dots,n \\ x_j \geq 0, & j=1,\dots,n \\ v_j x_j = 0, & j=1,\dots,n \end{cases}$$

vilka kan skrivas som

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \leq 0, & j=1,\dots,n \\ x_j \geq 0, & j=1,\dots,n \\ x_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, & j=1,\dots,n. \end{cases}$$

b) Falskt. Om b ökar så kommer $v(b)$ också att öka, eller möjligen vara oförändrat, varför $v'(12) \geq 0$. [Alternativt: Utnyttja att $v'(12)$ är det optimala värdet för dualvariabeln för det första villkoret.]

c) Falskt. Med tex $f(x) = e^x$, som är konvex, fås $1/f = e^{-x}$, som också är konvex.