Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	20 augusti 2009
Tid:	14-19
Hjälpmedel:	Inga
Antal uppgifter:	7 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson, tel 2435.

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påstående Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Betrakta ett linjärt optimeringsproblem på formen

$$\begin{array}{rrcrcrcll}
\max\ z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & & & \\
\text{då} & & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \leq & b_1 & (1)\\
& & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \leq & b_2 & (2)\\
& & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & \leq & b_3 & (3)\\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0, &
\end{array}$$

där $c_1, c_2, a_{11}, \ldots, a_{32}, b_1, b_2$ och b_3 är givna positiva konstanter.

Betrakta följande modifieringar av problemet.

(i) Resursen b_1 i villkoret (1) kan utökas med maximalt $\Delta b_1 > 0$ enheter och varje enhetsutökning minskar målfunktionsvärdet med $d_1 > 0$.

(ii) För varje enhet som vänsterledet i villkor (2) underskrider högerledet b_2 minskar målfunktionsvärdet med $d_2 > 0$.

(iii) För varje enhet över $\Delta b_3 > 0$ som vänsterledet i villkor (3) underskrider högerledet b_3 minskar målfunktionsvärdet med $d_3 > 0$. (Vänsterledet kan alltså anta värden ner till $b_3 - \Delta b_3$ utan målfunktionsvärdet påverkas.)

Introducera var och en av dessa modifieringar på ett sådant sätt att problemet *förblir linjärt.* (3p)

Uppgift 2

Givet följande linjära optimeringsproblem.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
z^* = & \min & 6x_1 & + & 9x_2 & + & 13x_3 & & \\
& \text{då} & 2x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & \geq & 17\\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \geq & 11\\
& & 2x_1 & & & + & 5x_3 & \geq & 12\\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Teckna det duala problemet (1p)

b) Utnyttja de tre duala punkterna (1, 1, 1), (1, 2, 1) och (1, 0, 2) för att göra en starkaste möjliga utsaga om z^*. (2p)

Uppgift 3

Betrakta problemet

$$\min_{x \epsilon R^2} f(x) = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2.$$

Låt $\bar{x} = (-1, 2)^T$.

a) Låt $\bar{d} = (2, -1)^T$. Visa att funktionen f avtar i riktningen $\bar{d}$ från punkten $\bar{x}$. (1p)

b) Visa att $\bar{t} = 1$ är ett optimalt steg från $\bar{x}$ i riktningen $\bar{d}$. (1p)

c) Visa att f inte är konvex på R^2. (1p)

Uppgift 4

Givet problemet

$$\begin{array}{rcl} \min\ f(x) & = & 2(x_1 - \frac{3}{4})^2 + (x_2 - \frac{5}{4})^2 \\ \text{då}\ g(x) & = & x_1^2 + x_2 - 1 \leq 0. \end{array}$$

Visa att $\bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})^T$ är en Karush-Kuhn-Tucker-punkt. Denna punkt utgör ett globalt minimum; motivera varför så är fallet. (3p)

Uppgift 5

Studera problemet

$$
\text{(HP)} \qquad \begin{aligned} z^* = \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_2 \leq 7 \\ & 2x_1 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1,\ x_2, \geq 0,\ \text{heltal,} \end{aligned}
$$

och villkoren

$$
\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq a \quad (i) \\ 2x_1 + bx_2 &\leq 5 \quad (ii). \end{aligned}
$$

Besvara delfrågorna nedan. Svaret ska motiveras genom att grafiskt illustrera det tillåtna området och bivillkor som är av intresse i den aktuella deluppgiften.

a) För vilka värden på $0 < a < \infty$ och $0 < b < \infty$ utgör villkor (i) respektive (ii) en giltig olikhet till det tillåtna området för (HP). (1p)

b) För vilka värden på $0 < a < \infty$ och $0 < b < \infty$ utgör villkor (i) respektive (ii) en fasett till det tillåtna området för (HP).

(1p)

c) Antag att man har tillgång till en LP-lösare som använder simplexmetoden. Vilket/vilka giltiga olikheter är nödvändiga och tillräckliga att lägga till för att optimallösningen till LP-relaxationen av (HP), inklusive dessa villkor, ska vara en optimal heltalslösning? Observera att så få villkor som möjligt ska läggas till.

(1p)

Uppgift 6

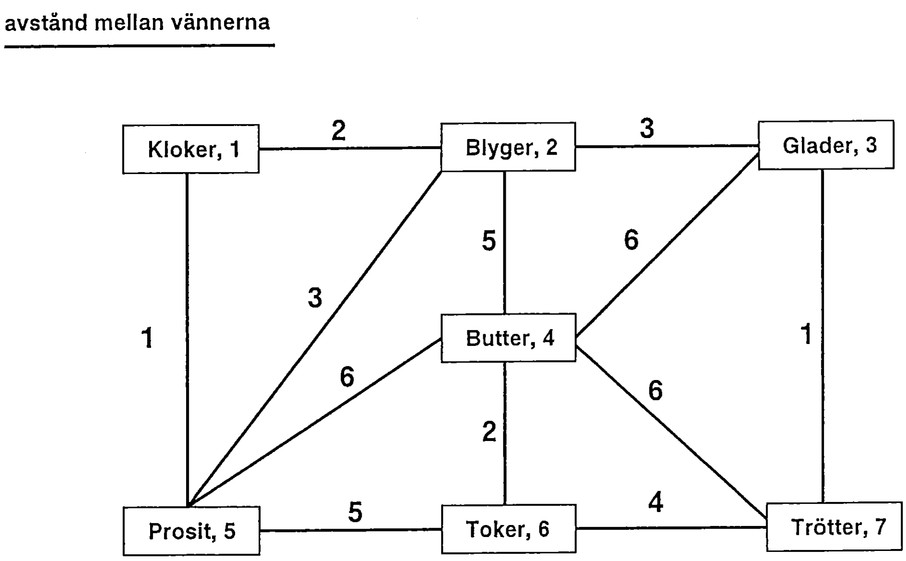
Vi befinner oss i en tid långt innan mail, sms eller ens papperspost finns tillgängligt och de sju vännerna Kloker, Blyger, Glader, Butter, Prosit, Toker och Trötter har bestämt sig för att bygga ett rörpostsystem för att kunna skicka meddelanden till varandra.

Kraven på detta rörpostsystem är:

- Alla par av vänner måste kunna skicka till varandra.
- För att hålla Butter på bra humör måste minst 3 rör ansluta till honom, detta kommer i fortsättningen att kallas "Buttervillkoret".
- Rent praktiskt är det enbart möjligt att bygga rörbana mellan vissa par av vänner. Beteckna mängden av möjliga par med

  $$I = \{(1,2),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,7)(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(6,7)\}.$$

- För varje par $(i,j) \in I$ har de mätt ut avståndet och betecknat detta med l_{ij}.
- Den totala åtgången av rör ska vara så liten som möjligt.
- De möjliga paren I samt avståndet l_{ij} illustreras i det bifogade nätverket.



Figur 1: Nätverket i uppgift 6.

Det resulterande problemet är ett minimalträdsproblem med ett sidovillkor, Buttervillkoret.

Inför, för $(i,j) \in I$, variabeln

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om rör byggs mellan } (i,j), \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Målfunktionen och Buttervillkoret kan nu betecknas

$$z = \sum_{(i,j)\in I} l_{ij}x_{ij} \quad \text{respektive} \quad x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \geq 3.$$

a) Lagrangerelaxera Buttervillkoret med multiplikatorn $u \geq 0$. Teckna målfunktionen för det Lagrangerelaxerade problemet och rita det resulterande nätverket.

(1p)

b) Bestäm den Lagrangeduala funktionens värde för $u = 0$ och $u = 2$ genom att lösa motsvarande Lagrangesubproblem. Använd lämplig algoritm. Vilken är den starkaste slutsatsen du kan dra om u^* respektive z^*.

(1p)

c) Istället för att Lagrangerelaxera Buttervillkoret så kan man lösa problemet genom att först välja att ta med de tre rör som är de billigaste som ansluter till Butter, och sedan fortsätta med samma algoritm som användes i deluppgift b. Kommer detta lösningsförfarande att garantera att den erhållna lösningen är optimal? Ge en kort motivering till ditt svar.

(1p)

Uppgift 7

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera svaret!

a) Karush-Kuhn-Tucker-villkoren för problemet

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{då} & x \geq 0, \end{array}$$

där $x \in R^n$, kan tecknas som

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \leq 0, \ j = 1, \ldots, n, \ \text{och } x_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

(1p)

b) Låt $v : R \rightarrow R$ med

$$\begin{array}{rlrcrcl} v(b) = & \min & 17x_1 & + & 11x_2 & & \\ & \text{då} & 7x_1 & + & 3x_2 & \geq & b \\ & & 3x_1 & + & 5x_2 & \geq & 7 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Då är $v'(12) = -2$. (1p)

c) Om funktionen $f : R \rightarrow R \backslash \{0\}$ är konvex på hela R så är funktionen $1/f$ konkav på hela R.

(1p)