TAOP07 Opt grk Y den 10 juni 2009: svar och kortfattade lösningar.

1. $$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{t=0}^{T} x_{jt} + d \sum_{t=0}^{T} y_t$$

$$\text{då} \begin{cases} y_t \geq x_{jt}, \quad j=1,\ldots,n, \quad t=0,\ldots,T & (1) \\ \displaystyle\sum_{\tau=t}^{t+k_j-1} x_{j\tau} \geq 1, \quad t=0,\ldots,T-k_j+1 & (2) \\ x_{jt} = 0/1, \quad j=1,\ldots,n, \quad t=0,\ldots,T \\ y_t = 0/1, \quad t=0,\ldots,T \end{cases}$$

Villkoren (1) gör att $y_t = 1$ gäller om något $x_{jt} = 1$, $j=1,\ldots,n$. Villkoren (2) säger att komponent j måste bytas minst en gång under varje tidsperiod som är k_j tidsenheter lång. (Observera att om $x_{j\tau} = 0$ för $\tau = t,\ldots,t+k_j-1$ så har komponenten passerat sin livslängd.)

2. a) Nej, eftersom hörnpunkter svarar mot tillåtna baslösningar, som för detta system kan innehålla högst 2 noll-skilda variabler.

b) Nej, ty $x_1 = x_3 = x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$ och $x_4 = -2 \ngeq 0$.

c) Nej, ty $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt beroende.

3. a)
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3 \\ 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ x_1x_2 - 1 \leq 0 & (3) \\ y(x_1x_2 - 1) = 0 & (4) \end{cases}$$

b) (1) $\Rightarrow y = 12$ som uppfyller (2).
(3) är uppfyllt med likhet, varför även (4) uppfylls.

c) $g(x_1) = f(x_1, \frac{1}{x_1}) = x_1^3 + 3x_1 + \frac{2}{x_1^3} + 3x_1 + \frac{3}{x_1} =$

$$= x_1^3 + 6x_1 + \frac{3}{x_1} + \frac{2}{x_1^3}$$

$g'(x_1) = 3x_1^2 + 6 - \frac{3}{x_1^2} - \frac{6}{x_1^4} \Rightarrow g'(-1) = 0$

(som ska gälla eftersom $x = (-1, -1)^T$ är en Karush-Kuhn-Tucker-punkt)

$g''(x_1) = 6x_1 + \frac{6}{x_1^3} + \frac{24}{x_1^5} \Rightarrow g''(-1) = -36 < 0$

varför $x_1 = -1$ är ett lokalt maximum längs randen till villkoret.

4. a) f kontinuerligt differentierbar och konvex på R^n $\Rightarrow$ $\varphi(t) = f(\bar{x}+t\bar{d})$ är kontinuerligt differentierbar och konvex för $t \geq 0$. Vidare är $\varphi'(t) = \nabla f(\bar{x}+t\bar{d})^T\bar{d}$ $\Rightarrow$ $\varphi'(t_1) < 0$ och $\varphi'(t_2) > 0$, varav det önskade resultatet följer.

b) $$\left.\begin{array}{l} \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+4 \\ 4x_2+4 \end{pmatrix} \\ \bar{x}+t\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}+t\bar{d}) = \begin{pmatrix} 4-2t \\ 4-8t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}+t\bar{d})^T\bar{d} = (4-2t, 4-8t)\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 18t-12$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}+\tfrac{1}{2}\cdot\bar{d})^T\bar{d} = -3 < 0 \text{ och } \nabla f(\bar{x}+1\cdot\bar{d})^T\bar{d} = 6 > 0$$

$\Rightarrow \min_{t\geq 0} \varphi(t)$ fås mellan $\frac{1}{2}$ och 1.

5. a) Nätverket är acykliskt och topologiskt sorterat $\Rightarrow$ använd Bellmans ekvationer i nodnummerordning. (Eller Dijkstras algoritm.) Bv: $1 \to 2 \to 4 \to 7$, längd: 10 km.

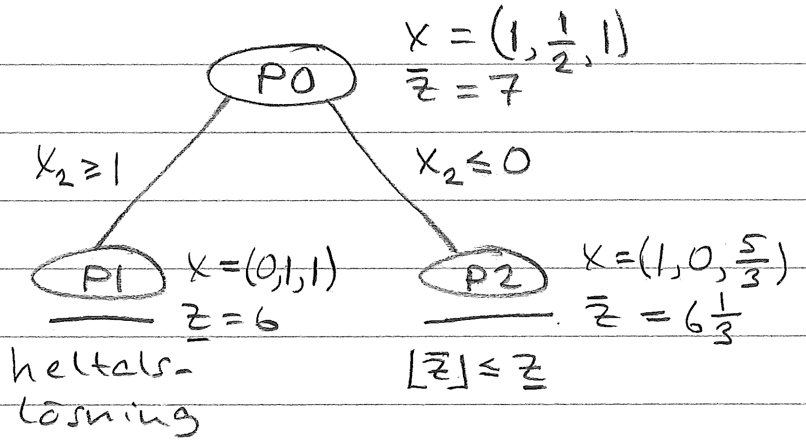
b) Bellmans ekvationer:

$$\begin{cases} y_1 = +\infty \\ y_j = \max_i \{\min(y_i, c_{ij})\}, \ j = 2, \ldots, 7. \end{cases}$$

Lös i nodnummerordning.
Väg med lägst hastighet:
$1 \to 3 \to 4 \to 7$ eller $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7$, med
lägst hastighet 70 km/h.

c) Vänd på samtliga bågar och
finn ett billigast-väg-träd
från Solköping (nod 7) till alla
andra noder.

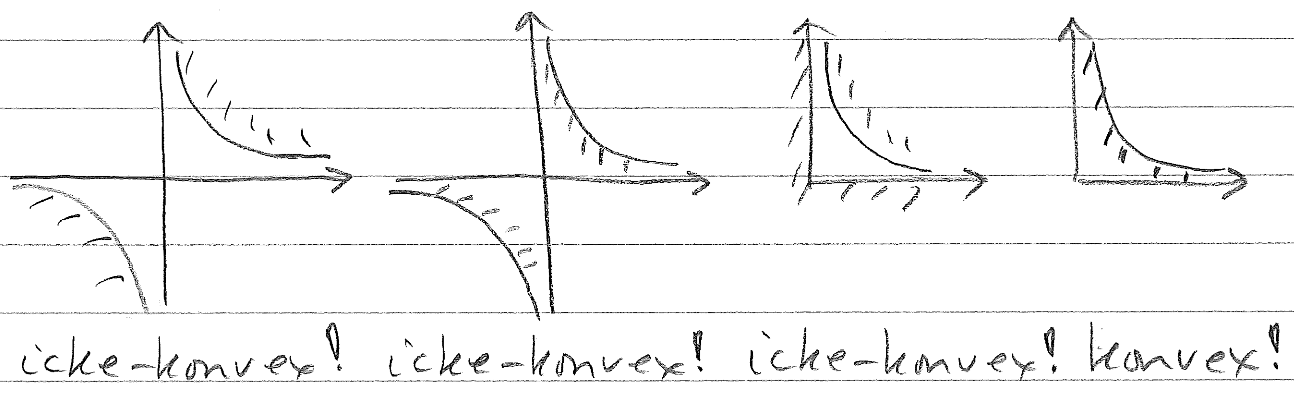
6. a)



Alltså är $x^* = (0,1,1)$ med $z^* = 6$.

b) Introducera $\bar{x}_2 = 1 - x_2$ och låt
$x_3 = x_3^1 + x_3^2$, där $x_3^1, x_3^2 = 0/1$.

7. a) Sant!



b) Sant! Låt $b = 2+\varepsilon$. För $-2 \leq \varepsilon \leq 0$ fås $z(b) = 3 + \frac{3}{2}\varepsilon$ för $x_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ och $x_2 = x_3 = 0$. För $0 \leq \varepsilon \leq 4$ fås $z(b) = 3 + \frac{4}{4}\varepsilon$ för $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{\varepsilon}{4}$ och $x_3 = 0$. Alltså är $z'_-(2) = \frac{3}{2}$ och $z'_+(2) = \frac{4}{4} = 1$.

c) Falskt! Värdet $h(u)$ utgör alltid en optimistisk skattning (en underskattning) av f^*, oavsett om $x(u)$ uppfyller de relaxerade villkoren eller ej.