Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	10 juni 2009
Tid:	14-19
Hjälpmedel:	Inga
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson, tel 2435.

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påstående Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

En maskin innehåller n stycken komponenter som alla måste fungera för att maskinen som helhet skall fungera. Varje komponent byts därför ut innan den passerat sin livslängd, vilken är k_j tidsenheter, för $j = 1, \ldots, n$. Varje k_j kan antas vara ett positivt heltal. Kostnaden för komponent j är c_j kronor. Kostnaden för att vid en tidpunkt byta komponenter är d kronor, *oavsett hur många komponenter som byts ut samtidigt*. Tidsåtgången för att byta komponenter är helt försumbar. Betrakta en planeringshorisont på T tidsenheter, där $T > k_j$ för $j = 1, \ldots, n$, och låt $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ vara de tidpunkter då komponenter kan bytas ut. Antag att vid tidpunkten $t = 0$ är alla komponenter nya.

Formulera en linjär 0/1-modell för problemet att minimera den totala kostnaden för komponenter och komponentbyten inom planeringshorisonten, givet att maskinen alltid skall fungera. Använd variabler x_{jt} som är 1 om komponent j byts ut vid tidpunkt t, och 0 annars, samt variabler y_t som är 1 om *någon* komponent byts ut vid tidpunkt t, och 0 annars.

[Ledning: Eftersom komponent j har livslängd k_j måste den för varje t bytas vid *minst en* av tidpunkterna t, $t+1, \ldots, t+k_j-1$.] **(3p)**

Uppgift 2

Betrakta systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 8 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & - & 5x_5 & = & -4 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0. \end{array}\right.$$

a) Är $x = (1, 1, 1, 0, 1)^T$ en hörnpunkt i den mängd som definieras av systemet? Varför (inte)? **(1p)**

b) Gäller $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ i någon hörnpunkt? Varför (inte)? **(1p)**

c) Är $x = (3, 0, 2, 0, 0)^T$ en hörnpunkt? Varför (inte)? **(1p)**

Uppgift 3

Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcl} \min & f(x) & = & x_1^3 + 3x_1^2\,x_2 + 2x_2^3 + 3x_1 + 3x_2 \\ \text{då} & x_1x_2 & \leq & 1. \end{array}$$

a) Teckna Karush-Kuhn-Tucker-villkoren för detta problem. **(1p)**

b) Visa att $x = (-1, -1)^T$ är en Karush-Kuhn-Tucker-punkt. **(1p)**

c) Visa att $x = (-1, -1)^T$ *inte* är ett lokalt minimum.

[Ledning: Studera funktionen $g(x_1) = f(x_1, 1/x_1)$ runt $x_1 = -1$.] **(1p)**

Uppgift 4

a) Låt funktionen $f : R^n \to R$ vara kontinuerligt differentierbar och konvex på R^n. Låt vidare $\bar{x} \in R^n$ vara given och antag att $\bar{d} \in R^n$ är en avtaganderiktning för f i $\bar{x}$.

Visa att om $t_1 > 0$ och $t_2 > 0$ är sådana att $\nabla f(\bar{x} + t_1\bar{d})^T\bar{d} < 0$ och $\nabla f(\bar{x} + t_2\bar{d})^T\bar{d} > 0$ så gäller att

$$\min_{t\geq 0} \varphi(t) = f(\bar{x} + t\bar{d})$$

fås för ett $\bar{t}$ sådant att $t_1 < \bar{t} < t_2$. **(2p)**

b) Betrakta problemet

$$\min_{x\in R^2} f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 4x_2.$$

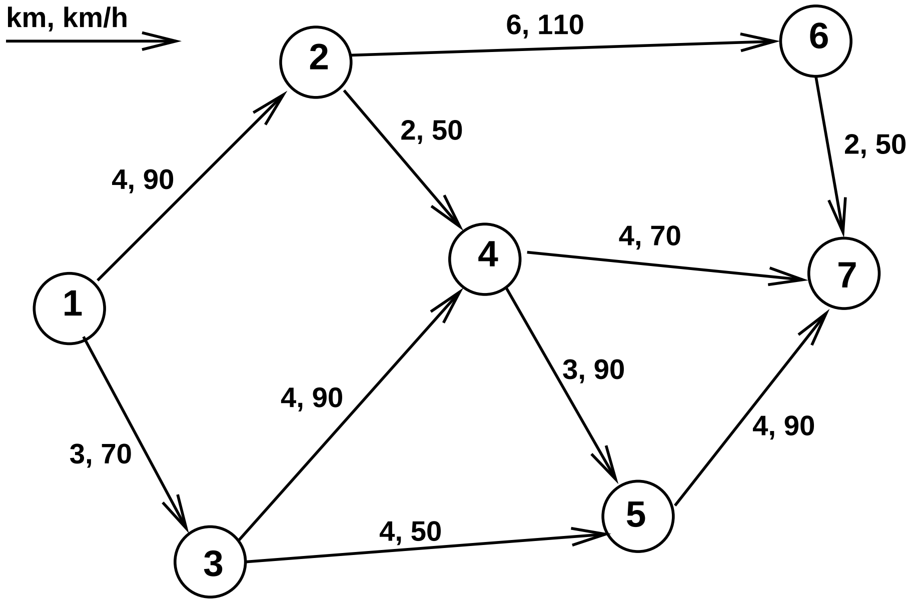
Låt $\bar{x} = (0, 0)^T$ och $\bar{d} = (-1, -2)^T$. Använd resultatet ovan för att avgöra om

$$\min_{t\geq 0} \varphi(t) = f(\bar{x} + t\ \bar{d})$$

fås för ett $\bar{t}$ sådant att $\frac{1}{2} < \bar{t} < 1$. **(1p)**

Uppgift 5

Lisa och Lotta, som pluggar i Linköping, har just skrivit vårens sista tentamen och ska fira detta genom att åka på semester till Solköping. Lisa och Lotta ska köra varsin bil och nedanstående nätverk beskriver möjliga färdvägar från Linköping (nod 1) till Solköping (nod 7). Övriga noder i nätverket representerar en korsning eller ett byte av hastighetsbegränsning. På varje båge anges längden på motsvarande sträcka i km och hastighetsbegränsningen i km/h.



Lisa är miljömedveten och vill välja den väg som är kortast, medan Lotta har köpt en ny sportbil och därför vill åka den väg där den lägsta hastighetsbegränsningen är så hög som möjligt.

a) Bestäm vilken väg Lisa ska åka genom att beräkna en kortaste väg (billigaste väg) från nod 1 till nod 7. **(1p)**

b) Bestäm vilken väg Lotta ska åka genom att beräkna en väg mellan nod 1 och nod 7 där den lägsta hastighetsbegränsningen är så hög som möjligt.

   [Ledning: Hur ser Bellmans ekvationer ut för denna problemställning?] **(1p)**

c) Halvvägs framme inser Lisa att hon kört fel väg (inom nätverket) och hon behöver därför finna en kortaste återstående väg till Solköping.

   Beskriv hur man ska modifiera det ursprungliga problemet för att, när man har löst ett billigaste-väg-problem, som sidoinformation ska få den billigaste vägen till Solköping oavsett var i nätverket man står. **(1p)**

Uppgift 6

a) Givet följande kappsäcksproblem, där olika variabler har olika övre och undre gränser.

$$\begin{aligned} z^* \;=\; \max\; & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{då}\quad & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ & 0 \leq x_2 \leq 2 \\ & 1 \leq x_3 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ heltaliga.} \end{aligned}$$

Använd trädsökning för att beräkna en optimallösning till problemet. Förgrena över den variabel som har störst fraktionell del, avsök $\geq$-grenen först och använd bredd-först-sökning. **(2p)**

b) Hasse vill lösa följande kappsäcksproblem.

$$\begin{aligned} z^* \;=\; \max\; & 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ \text{då}\quad & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1 \\ & 0 \leq x_3 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ heltaliga.} \end{aligned}$$

Han har tillgång till en lösare som förutsätter att samtliga koefficienter i problemet är positiva och att variablerna är binära. Hjälp Hasse att omformulera problemet ovan så att han kan använda denna lösare.

Observera att det viktiga i lösningsgången är att illustrera hur man generellt kan göra denna typ av transformationer av ett problem, och inte att hitta en speciallösning för just denna uppgift. **(1p)**

Uppgift 7

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera svaret!

a) Betrakta mängderna

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in R^2 \mid x_1 x_2 \leq 1\}, \\ X_2 &= \{x \in R^2 \mid x_1 x_2 \geq 1\}, \\ X_3 &= \{x \in R^2_+ \mid x_1 x_2 \leq 1\}, \\ X_4 &= \{x \in R^2_+ \mid x_1 x_2 \geq 1\}, \end{aligned}$$

där $R^2_+ = \{x \in R^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$. Då gäller att X_1, X_2 och X_3 är icke-konvexa och att X_4 är konvex. **(1p)**

b) Definiera för varje $b \geq 0$ värdet $z(b)$ enligt

$$\begin{aligned} z(b) \;=\; & \max\; 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ & \text{då } 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq b \\ & \quad 1 \geq x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Låt z'_- och z'_+ beteckna vänster- respektive högerderivator av z. Då gäller att $z'_-(2) = 3/2$ och $z'_+(2) = 1$. **(1p)**

c) Givet problemet

$$(P) \qquad \begin{aligned} f^* = \;& \min f(x) \\ & \text{då} \quad g(x) \leq 0 \quad \mid u \geq 0 \\ & \qquad x \in X. \end{aligned}$$

Låt $x(u)$ vara en optimallösning till Lagrange-relaxationen

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x).$$

Då gäller att

$$g(x(u)) \not\leq 0 \Rightarrow f^* \geq h(u)$$

och att

$$g(x(u)) \leq 0 \Rightarrow f^* \leq h(u).$$

(1p)