TAOP07 Optimeringslära gk Y, tentamen 16 mars 2009:
svar eller kortfattade lösningar.

1. Variabeldefinition:

   $x_{jk} \;=\; 1$ om bud k från spekulant j accepteras, 0 annars.

   Modell:

$$
\begin{array}{llcll}
\max z = & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} c_{jk} x_{jk} & & & \\
\text{då} & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} a_{ijk} x_{jk} & \leq & 1, & i = 1, \ldots, m \qquad (1) \\
 & \sum_{k=1}^{K_j} c_{jk} x_{jk} & \leq & b_j, & j = 1, \ldots, n \qquad (2) \\
 & x_{jk} & = & 0/1, & j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, K_j.
\end{array}
$$

   Villkoren (1) tillser att varje objekt säljs högst en gång, medan (2) tillser att spekulanternas budgetar inte överskrids. Målfunktionen maximerar försäljningsvärdet.

2. a) Skuggpriserna ges av $y_1 = 4/3$, $y_2 = 0$ och $y_3 = 1/3$.

   b) För alla högerled i det öppna intervallet $(19/5, 89/16)$.

   c) Om $c_3 > 10/3$. [Eftersom optimallösningen till det givna problemet är icke-degenererad, gäller säkert att $x_3^* > 0$ då $c_3 > 10/3$.]

3. a) Gomory-snittet blir $x_2 - s_1 \leq 0$, eller ekvivalent, $3x_1 + 3x_2 \leq 7$.

   b) Det konvexa höljet beskrivs av olikheterna $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

   c) Nej, eftersom Gomory-snittet inte sammanfaller med någon av de olikheter som beskriver det konvexa höljet.

4. För $u_1 = 1$ och $u_2 = 2$ fås $x_3 = x_4 = x_6 = 1$ och $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, vilket ger den optimistiska uppskattningen $8 + 11 + 11 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 = 52$. Lösningen är *inte* tillåten, varför ingen pessimistisk uppskattning fås.

   För $u_1 = 2$ och $u_2 = 4$ fås $x_2 = x_4 = x_5 = 1$ och $x_1 = x_3 = x_6 = 0$, vilket ger den optimistiska uppskattningen $1 + 4 + 1 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 50$. Lösningen *är* tillåten och ger den pessimistiska uppskattningen $11 + 18 + 9 = 38$.

   Alltså gäller att $z^* \in [38, 50]$.

5. a) Gradienten av målfunktionen ges av $(-3, 1)^{\mathrm{T}}$. I punkten $x = (1, 1)$ är de två första villkoren aktiva och deras utåtriktade normaler ges av $(-3, 1)^{\mathrm{T}}$ och $(2, 2)^{\mathrm{T}}$. Multiplikatorerna får värdena $y_1 = 1$ och $y_2 = 0$. Eftersom de är icke-negativa så är $x = (1, 1)$ en Karush-Kuhn-Tucker-punkt.

b) I punkten $x = (0,0)$ är första och sista villkoret aktiva. Deras utåtriktade normaler ges av $(0,1)^{\mathrm{T}}$ och $(0,-1)^{\mathrm{T}}$. Eftersom målfunktionens gradient inte kan uttryckas som en linjärkombination av dessa normaler (som är linjärt beroende) är punkten $x = (0,0)$ inte en Karush-Kuhn-Tucker-punkt.

c) Endast punkten $x = (0,0)$ är ett lokalt maximum. [Punkten $x = (1,1)$ är inte ett lokalt maximum eftersom målfunktionsvärdet växer längs randen till det första villkoret.]

6. För detta problem ges Bellmans ekvationer av

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \min\{y_1 - 2, y_3 - 3\} \\ y_3 = \min\{y_1 + 1, y_4 - 4\} \\ y_4 = \min\{y_1 + 2, y_2 + 5\} \\ y_5 = \min\{y_3 - 1, y_4 + 2\}. \end{cases}$$

Från andra, tredje och fjärde ekvationen följer att

$$\begin{cases} y_2 \leq y_3 - 3 \\ y_3 \leq y_4 - 4 \\ y_4 \leq y_2 + 5. \end{cases}$$

Alltså fås att $0 \leq y_3 - y_2 - 3 \leq y_4 - y_2 - 7 \leq -2$, varav följer att Bellmans ekvationer saknar lösning. [Nodpriserna y_i, $i = 1, \ldots, 5$, kan tolkas som dualvariabler och frånvaron av lösning beror på att nätverket innehåller en cykel av negativ kostnad, 2 - 4 - 3 - 2, vilken gör att kortaste-väg-problemet har obegränsat optimum, varför det inte finns någon dualt tillåten lösning.]

7. a) Falskt, eftersom $f''(x) = \frac{2x^2+\alpha^2}{(\alpha^2-x^2)^{5/2}} > 0$ gäller för $\alpha > 0$ och $|x| < \alpha$ så är funktionen istället konvex.

b) Falskt. Eftersom vektorerna $(1,2,-3)^{\mathrm{T}}$, $(2,-1,4)^{\mathrm{T}}$ och $(5,2,1)^{\mathrm{T}}$ är linjärt beroende så är den givna punkten inte är en tillåten baslösning, det vill säga en hörnpunkt. [De tre villkoren är linjärt beroende, varför ett av dem kan strykas utan att systemets lösningsmängd förändras. I en hörnpunkt skall alltså endast (högst) två variabler vara positiva.]

c) Sant. Eftersom $g_i(x) \leq 0$ implicerar att $\max\{0, g_i(x)\} = 0$ så gäller att

$$\begin{aligned} f^* = \quad & \min_{x \epsilon R^n} f(x) + \mu \sum_{i=1}^{m} (\max\{0, g_i(x)\})^2, \\ & \text{då } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Värdet l^* fås genom att villkoren $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, i detta problem stryks, det vill säga genom att problemet relaxeras. Alltså gäller $l^* \leq f^*$.